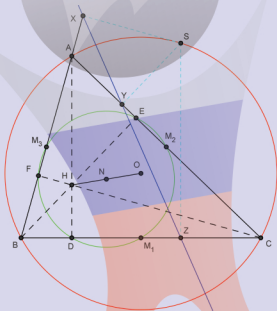


Geometri From OSN



Tutor Widodo

Salam Sapa

Soal-soal yang ada di dalam super mini ebook ” *Geometri From OSN*” ini diambil dari soal-soal OSN Matematika SMA, mulai dari tahun 2002 sampai dengan tahun 2015. Ebook ini penulis bagi menjadi dua bagian. Bab I berisi soal tanpa penyelesaian, ditujukan bagi pembaca yang mau mencoba terlebih dahulu tanpa terganggu dengan adanya solusi. Sedangkan pada Bab II, selain soal penulis juga menyertakan beberapa penyelesaian yang berhasil penulis dapatkan. Semua solusi yang ada di dalam ebook ini adalah hasil pemikiran penulis sendiri. Oleh karena itu, jika dari pembaca ada yang memiliki penyelesaian lain ataupun koreksi terhadap solusi yang telah ada, penulis saat terbuka menerimanya.

Terakhir, ebook ini bersifat gratis dan diizinkan untuk diperbanyak dalam bentuk cetak maupun elektronik, asalkan untuk tujuan pendidikan dan bukan tujuan komersil, serta dengan tetap mencantumkan identitas penulis dengan jelas.

Salam hangat dan semoga bermanfaat.

Daftar Isi

1	Kumpulan Soal Geometri OSN SMA	1
2	Pembahasan Soal Geometri OSN SMA	5

Kumpulan Soal Geometri OSN SMA

1. Diberikan segitiga ABC dengan $AC > BC$. Pada lingkaran luar segitiga ABC terletak titik D yang merupakan titik tengah busur AB yang memuat titik C . Misalkan E adalah titik pada AC sehingga DE tegak lurus pada AC . Buktikan bahwa $AE = EC + CB$.
2. Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut jika hasil kali dari dua sisi yang bukan sisi miring sama dengan tiga kali keliling segitiga.
3. Misalkan M suatu titik di dalam segitiga ABC sedemikian rupa hingga $\angle AMC = 90^\circ$, $\angle AMB = 150^\circ$ dan $\angle BMC = 120^\circ$. Titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga AMC , AMB dan BMC berturut-turut adalah P , Q dan R . Buktikan bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC .
4. Misalkan $ABCD$ sebuah segiempat konveks. Persegi AB_1A_2B dibuat sehingga kedua titik A_2, B_1 terletak di luar segiempat $ABCD$. Dengan cara serupa diperoleh persegi-persegi BC_1B_2C , CD_1C_2D dan DA_1D_2A . Misalkan K adalah titik potong AA_2 dengan BB_1 , L adalah titik potong BB_2 dengan CC_1 , M adalah titik potong CC_2 dengan DD_1 , dan N adalah titik potong DD_2 dengan AA_1 . Buktikan bahwa $KM = LN$ dan KM tegak lurus LN .
5. Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat : $\tan A$, $\tan B$ dan $\tan C$ adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.

6. Pada segitiga ABC , M adalah titik tengah BC dan G adalah titik berat segitiga ABC . Sebuah garis ℓ melalui G memotong ruas garis AB di P dan ruas garis AC di Q , dimana $P \neq B$ dan $Q \neq C$. Jika $[XYZ]$ menyatakan luas segitiga XYZ , tunjukkan bahwa

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$$

7. Titik-titik A, B, C, D terletak pada lingkaran S sedemikian rupa sehingga AB merupakan garis tengah S , tetapi CD bukan garis tengah S . Diketahui pula bahwa C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap AB . Garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P . Titik-titik Q dan R berturut-turut adalah perpotongan garis AC dengan garis BD dan garis AD dengan garis BC .

- Buktikan bahwa P, Q dan R segaris
- Buktikan bahwa garis QR tegak lurus terhadap garis AB .

8. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b , dan c . Garis-garis singgung lingkaran dalam segitiga ABC yang sejajar dengan sisi-sisi segitiga ABC membentuk tiga segitiga kecil. Pada masing-masing segitiga kecil dibuat lingkaran dalam. Buktikan bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah

$$\frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{(a + b + c)^3}$$

9. Pada segitiga ABC , titik-titik D, E dan F berturut-turut terletak pada segmen BC, CA , dan AB . Nyatakan P sebagai titik perpotongan AD dan EF . Tunjukkan bahwa

$$\frac{AB}{AF} \times CD + \frac{AC}{AE} \times BD = \frac{AD}{AP} \times BC$$

10. Diberikan segitiga ABC lancip. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA , dan AB berturut-turut di D, E , dan F . Garis bagi sudut A memotong DE dan DF berturut-turut di K dan L . Misalkan AA_1 adalah garis tinggi dan M titik tengah BC .

- Buktikan bahwa BK dan CL tegak lurus garis bagi sudut BAC
- Tunjukkan bahwa A_1KML adalah segiempat talibusur

11. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AC > BC$ dan titik pusat lingkaran luar O . Garis tinggi segitiga ABC dari C memotong AB dan lingkaran luar segitiga ABC lagi berturut-turut di titik D dan E . Garis melalui O sejajar AB memotong garis AC di titik F .

- Buktikan bahwa garis CO , garis melalui F tegak lurus AC , dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik.
12. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi H . Misalkan K sebarang titik didalam segitiga ABC yang tidak sama dengan O maupun H . Titik L dan M terletak diluar segitiga ABC sedemikian sehingga $AKCL$ dan $AKBM$ jajargenjang. Terakhir, misalkan BL dan CM berpotongan di titik N dan misalkan juga J adalah titik tengah HK . Buktikan bahwa $KONJ$ jajargenjang.
 13. Diberikan sebarang segitiga lancip ABC . Misalkan l_a garis yang melalui A dan tegak lurus AB , l_b garis yang melalui B dan tegak lurus BC , l_c garis yang melalui C dan tegak lurus CA . Misalkan garis l_b dan l_c berpotongan di titik D , garis l_c dan l_a berpotongan di titik E dan terakhir garis l_a dan l_b berpotongan di titik F . Buktikan bahwa luas segitiga DEF paling sedikit tiga kali luas segitiga ABC .
 14. Diberikan segitiga sebarang ABC dan misalkan lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung sisi BC , CA dan AB berturut - turut di titik D , E dan F . Misalkan K dan L berturut - turut titik pada sisi CA dan AB sehingga $\angle EDK = \angle ADE$ dan $\angle FDL = \angle ADF$. Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga AKL menyinggung lingkaran dalam segitiga ABC .
 15. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB > AC$ dan memiliki titik pusat lingkaran luar O . Garis BO dan CO memotong garis bagi $\angle BAC$ berturut - turut di titik P dan Q . Selanjutnya garis BQ dan CP berpotongan di titik R . Buktikan bahwa garis AR tegak lurus terhadap garis BC .
 16. Diberikan sebarang segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC dan lingkaran luar segitiga ABC berturut-turut di D dan E . Misalkan M dan N berturut-turut titik tengah BD dan CE . Lingkaran luar segitiga ABD memotong AN di titik Q . Lingkaran yang melalui A dan menyinggung BC di D memotong garis AM dan sisi AC berturut-turut di titik P dan R . Tunjukkan bahwa empat titik B, P, Q, R terletak pada satu garis.
 17. Diberikan segitiga lancip ABC dengan lingkaran luar ω . Garis bagi $\angle BAC$ memotong ω di titik M . Misalkan P suatu titik pada garis AM dengan P di dalam segitiga ABC . Garis melalui P yang sejajar AB dan garis melalui P yang sejajar AC memotong sisi BC berturut-turut di titik E dan F . Garis ME dan MF memotong ω lagi berturut-turut di titik K dan L . Buktikan bahwa garis-garis AM, BL dan CK konkuren.

18. Diberikan jajar genjang $ABCD$. Pada sisi luar jajar genjang, dikonstruksi persegi-persegi ABC_1D_1 , BCD_2A_2 , CDA_3B_3 dan DAB_4C_4 . Pada sisi-sisi luar B_4D_1 , C_1A_2 , D_2B_3 , dan A_3C_4 dari segitiga-segitiga AB_4D_1 , BC_1A_2 , CD_2B_3 , dan DA_3C_4 , konstruksi persegi-persegi lagi dengan pusat berturut-turut O_A , O_B , O_C dan O_D . Buktikan bahwa

$$AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$$

19. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F . Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL .
20. Diberikan segitiga ABC dengan AD sebagai garis bagi dalam $\angle BAC$. Misalkan titik M dan N berturut-turut pada AB dan AC sehingga $\angle MDA = \angle ABC$ dan $\angle NDA = \angle ACB$. Jika P merupakan titik potong dari garis AD dan garis MN , buktikan bahwa

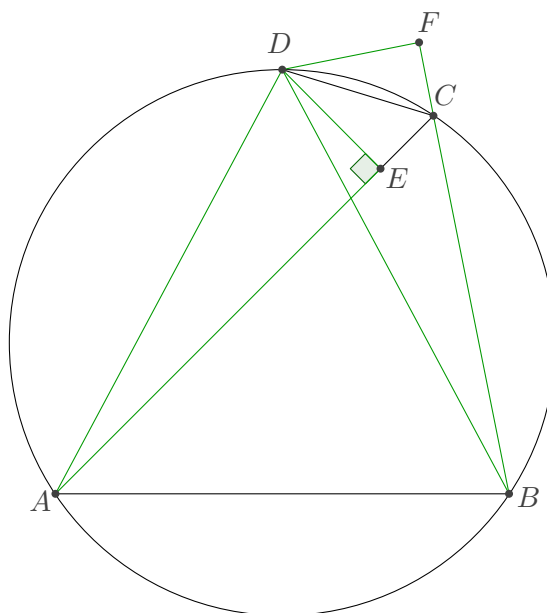
$$AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$$

21. Diberikan segitiga lancip ABC . Lingkaran Γ_B adalah lingkaran yang melewati AB dan menyinggung AC pada A dan berpusat di O_B . Definisikan yang serupa untuk Γ_C dan O_C . Misalkan garis tinggi segitiga ABC dari B dan C memotong lingkaran luar segitiga ABC pada X dan Y . Buktikan A , titik tengah XY , dan titik tengah O_BO_C segaris.
22. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O . Garis AO memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik D . Misalkan P titik pada sisi BC . Garis melalui P yang tegak lurus AP memotong garis DB dan DC berturut-turut di titik E dan F . Garis melalui D tegak lurus BC memotong EF di titik Q . Buktikan bahwa $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = CP$

Pembahasan Soal Geometri OSN SMA

1. (OSN SMA 2002) Diberikan segitiga ABC dengan $AC > BC$. Pada lingkaran luar segitiga ABC terletak titik D yang merupakan titik tengah busur AB yang memuat titik C . Misalkan E adalah titik pada AC sehingga DE tegak lurus pada AC . Buktikan bahwa $AE = EC + CB$.

Penyelesaian : Misalkan F terletak pada perpanjangan BC sehingga $CF = CE$. Seperti pada gambar di bawah ini.



Karena D terletak pada pertengahan busur AB maka $\angle ABD = \angle BAD$. Oleh karena itu $\triangle ABD$ adalah segitiga samakaki dengan $AD = BD$.

Perhatikan juga

$$\begin{aligned}\angle DCF &= \angle BAD \\ &= \angle ABD \\ &= \angle ECD\end{aligned}$$

dan karena $CE = CF$, $AD = AD$ maka $\triangle CDE$ kongruen dengan $\triangle CDF$. Hal ini berakibat $\angle CFD = \angle CED = \angle AED$. Padahal kita ketahui $\angle DAE = \angle DBF$ dan $AD = BD$, sehingga $\triangle ADE$ kongruen dengan $\triangle BDF$. Oleh karenanya, $AE = BF = BC + CF = BC + CE$ seperti yang diminta. $\square$

2. (*OSN SMA 2003*) Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut jika hasil kali dari dua sisi yang bukan sisi miring sama dengan tiga kali keliling segitiga.

Penyelesaian : Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b, c dengan c sebagai sisi terpanjang dan misalkan pula $a \geq b$. Berdasarkan Pitagoras diperoleh $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sehingga

$$ab = 3(a + b + c) = 3\left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 3\left(a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 2ab}\right)$$

Misalkan $a + b = x$ dan $ab = y$, maka didapat

$$\begin{aligned}y &= 3\left(x + \sqrt{x^2 - 2y}\right) \\ \Leftrightarrow y - 3x &= 3\sqrt{x^2 - 2y} \\ \Leftrightarrow y^2 - 6xy + 9x^2 &= 9x^2 - 18y \\ \Leftrightarrow y^2 - 6xy + 18y &= 0 \\ \Leftrightarrow y(y - 6x + 18) &= 0 \\ \Leftrightarrow ab(ab - 6a - 6b + 18) &= 0\end{aligned}$$

Karena $ab > 0$, akibatnya $ab - 6a - 6b + 18 = 0$ yang ekuivalen dengan $(a - 6)(b - 6) = 18$.

Oleh karena itu, ada 3 kasus yang memenuhi

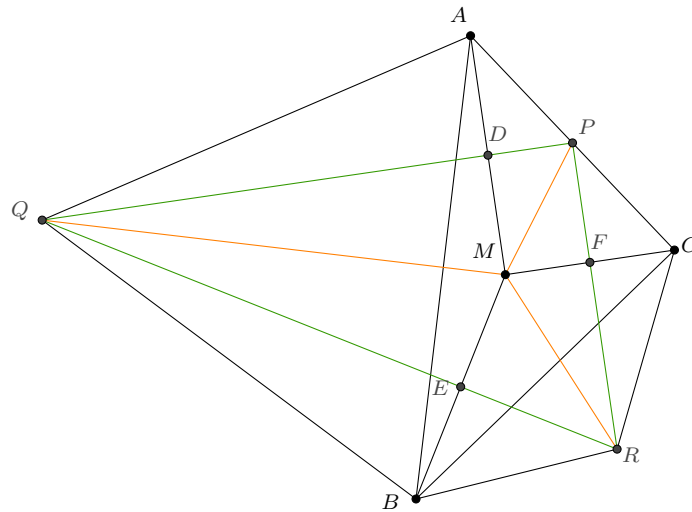
- $a - 6 = 18$ dan $b - 6 = 1$, sehingga didapat $a = 24, b = 7$ dan $c = 25$.

- $a - 6 = 9$ dan $b - 6 = 2$, sehingga didapat $a = 15, b = 8$ dan $c = 17$.
- $a - 6 = 6$ dan $b - 6 = 3$, sehingga didapat $a = 12, b = 9$ dan $c = 15$.

Jadi, ada 6 pasangan (a, b, c) yang memenuhi yaitu $(24, 7, 25), (7, 24, 25), (15, 8, 17), (8, 15, 17), (12, 9, 15), (9, 12, 15)$. $\square$

3. (OSN SMA 2005) Misalkan M suatu titik di dalam segitiga ABC sedemikian rupa hingga $\angle AMC = 90^\circ, \angle AMB = 150^\circ$ dan $\angle BMC = 120^\circ$. Titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga AMC, AMB dan BMC berturut-turut adalah P, Q dan R . Buktikan bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC .

Penyelesaian : Misalkan D adalah titik potong AM dan PQ , E titik potong BM dan QR , dan F titik potong CM dan PR ,



Perhatikan bahwa $QA = QB$ yaitu jari-jari lingkaran luar $\triangle AQB$ sehingga

$$QA = QB = \frac{AB}{2 \sin \angle AMB} = \frac{c}{2 \sin 150^\circ} = c$$

sehingga AQB adalah segitiga sama sisi.

Dengan cara serupa diperoleh pula

$$RB = RC = \frac{BC}{2 \sin \angle BMC} = \frac{a}{2 \sin 120^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

dengan aturan cosinus, mudah dibuktikan bahwa $\angle BRC = 120^\circ$.

Karena D, E, F masing-masing adalah titik tengah AM, BM, CM maka luas $\triangle PQR$ setengah dari luas segilima $AQBRC$. Padahal luas segilima $AQBRC$ adalah

$$\begin{aligned} [AQBRC] &= [AQB] + [BRC] + [ABC] \\ &= \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sin 120^\circ + [ABC] \\ &= \frac{\sqrt{3}c^2}{4} + \frac{\sqrt{3}a^2}{12} + [ABC] \end{aligned}$$

sehingga

$$[PQR] = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}c^2}{4} + \frac{\sqrt{3}a^2}{12} + [ABC] \right)$$

jadi untuk membuktikan $[PQR] > [ABC]$ cukup ditunjukkan

$$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} + \frac{\sqrt{3}a^2}{12} > [ABC]$$

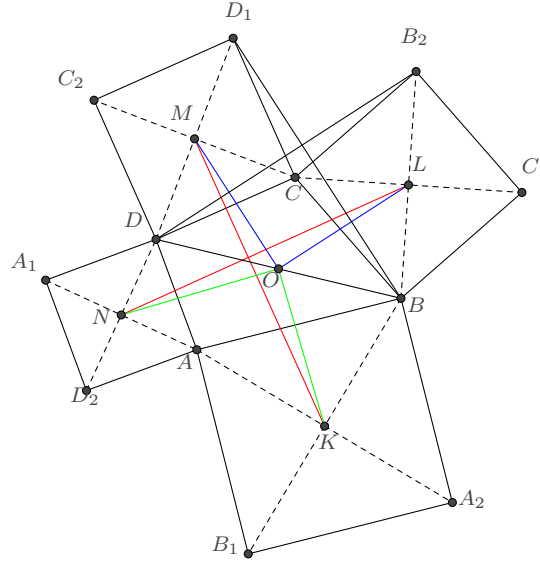
padahal kita memiliki

$$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} + \frac{\sqrt{3}a^2}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}(3c^2 + a^2) \geq \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 2\sqrt{3c^2 \cdot a^2} = \frac{ac}{2} > \frac{ac \cdot \sin \angle ABC}{2} = [ABC]$$

□

4. (OSN SMA 2005) Misalkan $ABCD$ sebuah segiempat konveks. Persegi AB_1A_2B dibuat sehingga kedua titik A_2, B_1 terletak di luar segiempat $ABCD$. Dengan cara serupa diperoleh persegi-persegi BC_1B_2C, CD_1C_2D dan DA_1D_2A . Misalkan K adalah titik potong AA_2 dengan BB_1 , L adalah titik potong BB_2 dengan CC_1 , M adalah titik potong CC_2 dengan DD_1 , dan N adalah titik potong DD_2 dengan AA_1 . Buktikan bahwa $KM = LN$ dan KM tegak lurus LN .

Penyelesaian : Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan bahwa B_2D adalah bayangan dari BD_1 jika dirotasi 90° terhadap C . Oleh karena itu, diperoleh $DB_2 = BD_1$ dan $DB_2 \perp BD_1$. Selanjutnya misalkan O titik tengah segmen BD maka didapat

$$OL = \frac{B_2D}{2} = \frac{BD_1}{2} = OM$$

dan karena $OL \parallel B_2D$ dan $OM \parallel BD_1$ maka $OL \perp OM$.

Dengan cara serupa diperoleh pula, $ON = OK$ dan $ON \perp OK$.

Oleh karena itu, MK adalah hasil rotasi LN terhadap O dengan rotasi sebesar 90° . Akibatnya $MK = LN$ dan $MK \perp LN$.

Catatan : dalam solusi di atas kita memakai well known fact, jika $A'B'$ adalah bayangan dari AB oleh rotasi $R(O, \alpha)$ maka $A'B'$ dan AB membentuk sudut sebesar α . $\square$

5. (OSN SMA 2006) Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat : $\tan A, \tan B$ dan $\tan C$ adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.

Penyelesaian : Perhatikan bahwa $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$. Selain itu, kita juga memiliki $A + B + C = \pi$, sehingga $\tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A + \tan(B + C)(1 - \tan B \tan C) \\ &= \tan A - \tan A(1 - \tan B \tan C) \\ &= \tan A \tan B \tan C \end{aligned}$$

Untuk memudahkan penulisan, misalkan $\tan A = a$, $\tan B = b$ dan $\tan C = c$, untuk a, b, c suatu bilangan asli. WLOG, $a \geq b \geq c$. Sehingga didapat

$$abc = a + b + c \leq 3a \Leftrightarrow bc \leq 3$$

Ada tiga kasus yang memenuhi,

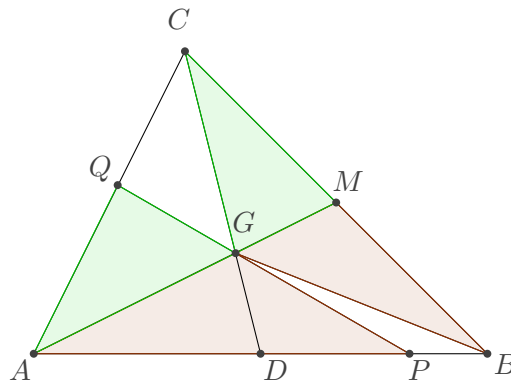
- $b = 3, c = 1$, sehingga didapat $a = 2$, kontradiksi $a \geq b$.
- $b = 2, c = 1$, sehingga didapat $a = 3$.
- $b = c = 1$, yang mengakibatkan hal absurd, $a = a + 2$.

Jadi, hanya ada satu kemungkinan nilai $\tan A, \tan B, \tan C$ yaitu $\tan A = 3, \tan B = 2$, dan $\tan C = 1$. Karena pada domain $(0, \frac{\pi}{2})$, $\tan$ adalah fungsi bijektif, maka hanya ada tepat satu pasangan sudut (A, B, C) yang memenuhi (*up to permutation* tentunya ya). Sehingga terbukti semua segitiga anggota S adalah sebangun. $\square$

6. (OSN SMA 2006) Pada segitiga ABC , M adalah titik tengah BC dan G adalah titik berat segitiga ABC . Sebuah garis ℓ melalui G memotong ruas garis AB di P dan ruas garis AC di Q , dimana $P \neq B$ dan $Q \neq C$. Jika $[XYZ]$ menyatakan luas segitiga XYZ , tunjukkan bahwa

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$$

Penyelesaian :



G adalah titik berat $\triangle ABC$ sehingga $AG : GM = 2 : 1$. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} &= \frac{\frac{1}{3}[ABM]}{[PAG]} + \frac{\frac{1}{3}[ACM]}{[QGA]} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{AM \times AB}{AG \times AP} + \frac{AM \times AC}{AG \times AQ} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{AM}{AG} \left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} \right)
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu cukup ditunjukkan bahwa $\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3$. Padahal berdasarkan hasil dari soal OSN 2009 diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{AB}{AP} \times MC + \frac{AC}{AQ} \times MB &= \frac{AM}{AG} \times BC \Leftrightarrow \frac{AB}{AP} \times MC + \frac{AC}{AQ} \times MC = \frac{3}{2} \times 2MC \\
 &\Leftrightarrow \frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$$

Bashing Time : Soal ini juga bisa dikuli cukup mudah dengan *Barycentric*. Gunakan $\triangle ABC$ sebagai referensi. Misalkan $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ dan $C(0, 0, 1)$. Maka diperoleh $M(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dan $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Misalkan koordinat $P(p, 1-p, 0)$, untuk suatu p bilangan real positif. Akibatnya persamaan garis ℓ yaitu

$$(p-1)x + py + (1-2p)z = 0$$

dengan memotongkannya dengan persamaan garis AC yaitu $y = 0$ diperoleh koordinat

titik $Q(2p-1, 0, p-1)$. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 [BGM] &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} [ABC] = \frac{1}{6} [ABC] \\
 [PAG] &= \begin{vmatrix} p & 1-p & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} [ABC] = \frac{1-p}{3} [ABC] \\
 [CMG] &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} [ABC] = \frac{1}{6} [ABC] \\
 [QGA] &= \frac{1}{3p-2} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2p-1 & 0 & p-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} [ABC] = \frac{p-1}{3(3p-2)} [ABC]
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

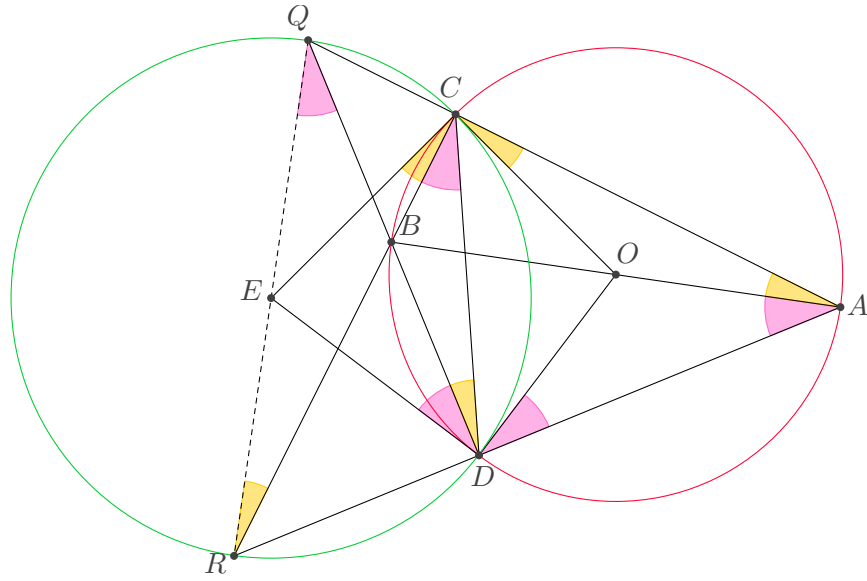
$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1-p}{3}} + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{p-1}{3(3p-2)}} = \frac{3}{2}$$

□

7. (OSN SMA 2007) Titik-titik A, B, C, D terletak pada lingkaran S sedemikian rupa sehingga AB merupakan garis tengah S , tetapi CD bukan garis tengah S . Diketahui pula bahwa C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap AB . Garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P . Titik-titik Q dan R berturut-turut adalah perpotongan garis AC dengan garis BD dan garis AD dengan garis BC .

- Buktikan bahwa P, Q dan R segaris
- Buktikan bahwa garis QR tegak lurus terhadap garis AB .

Penyelesaian : Perhatikan sketsa gambar di bawah ini!



- a. Perhatikan bahwa $\angle QCR = 90^\circ = \angle RDQ$ sehingga $CDRQ$ adalah segiempat tali busur dengan diameter QR . Misalkan E adalah titik tengah QR . Akan kita tunjukkan bahwa EC dan ED adalah garis singgung lingkaran Γ . Untuk itu cukup ditunjukkan bahwa $EC \perp CO$ dan $CD \perp DO$.

Perhatikan

$$\angle ECB = \angle ERC = \angle CDB = \angle CAB = \angle ACO$$

sehingga $\angle ECO = \angle RCA = 90^\circ$.

Dengan cara yang sama diperoleh pula

$$\angle EDB = \angle EQB = \angle BCD = \angle BAD = \angle ADO$$

sehingga $\angle EDO = \angle QDA = 90^\circ$.

Jadi, terbukti bahwa EC dan ED adalah garis singgung lingkaran Γ . Akibatnya titik E berhimpit dengan titik P . Dengan kata lain $E = P$. Oleh karena itu, terbukti P, Q dan R segaris.

- b. Perhatikan $\triangle AQR$, $RC \perp AQ$ dan $QD \perp AR$ sehingga perpotongan RC dan QD yaitu titik B adalah titik tinggi $\triangle AQR$. Sehingga jelas $AB \perp QR$.

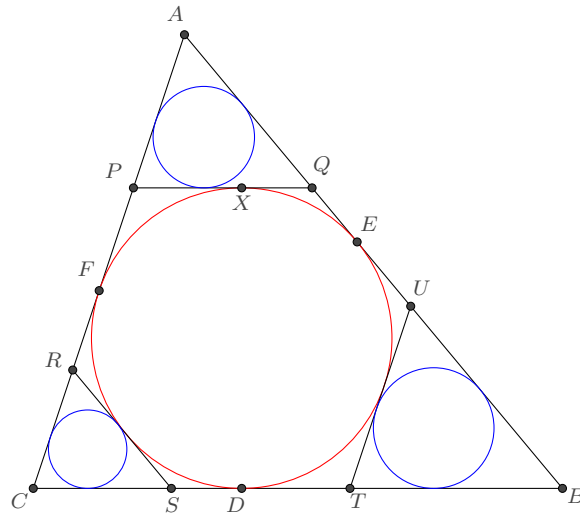
□

8. (OSN SMA 2008) Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b , dan c . Garis-garis singgung lingkaran dalam segitiga ABC yang sejajar dengan sisi-sisi segitiga ABC

membentuk tiga segitiga kecil. Pada masing-masing segitiga kecil dibuat lingkaran dalam. Buktikan bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah

$$\frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{(a + b + c)^3}$$

Penyelesaian : Perhatikan gambar di bawah ini!



Misalkan jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC, AQP, BTU, CRS berturut-turut adalah r, r_a, r_b dan r_c . Perhatikan bahwa segitiga AQP, BTU, CRS masing-masing sebangun dengan segitiga ABC .

Misalkan $s = \frac{a+b+c}{2}$, maka panjang $AE = AF = s - a$. Sehingga diperoleh keliling $\triangle AQP$ yaitu

$$AQ + QP + PA = AQ + QX + XP + PA = AE + AF = 2(s - a)$$

Akibatnya didapatkan

$$r_a = \frac{2(s - a)}{2s} \cdot r = \frac{(s - a)r}{s}$$

dengan cara serupa diperoleh pula

$$r_b = \frac{(s - b)r}{s} \quad \text{dan} \quad r_c = \frac{(s - c)r}{s}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 &= r^2 + \left(\frac{(s-a)r}{s} \right)^2 + \left(\frac{(s-b)r}{s} \right)^2 + \left(\frac{(s-c)r}{s} \right)^2 \\
 &= \frac{r^2}{s^2} (s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2) \\
 &= \frac{r^2}{s^2} (4s^2 - 2as - 2bs - 2cs + a^2 + b^2 + c^2) \\
 &= \frac{r^2}{s^2} (4s^2 - 2s(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2) \\
 &= \frac{r^2}{s^2} (4s^2 - 4s^2 + a^2 + b^2 + c^2) \\
 &= \frac{r^2}{s^2} (a^2 + b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

Dengan mengingat bahwa $r = \frac{L}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, maka jumlah luas keempat lingkaran tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 \pi r^2 + \pi r_a^2 + \pi r_b^2 + \pi r_c^2 &= \frac{\pi r^2}{s^2} (a^2 + b^2 + c^2) \\
 &= \frac{\pi (s-a)(s-b)(s-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{s^3} \\
 &= \frac{\pi (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^3}
 \end{aligned}$$

□

9. (*OSN SMA 2009*) Pada segitiga ABC , titik-titik D, E dan F berturut-turut terletak pada segmen BC, CA , dan AB . Nyatakan P sebagai titik perpotongan AD dan EF . Tunjukkan bahwa

$$\frac{AB}{AF} \times CD + \frac{AC}{AE} \times BD = \frac{AD}{AP} \times BC$$

Penyelesaian : Misalkan notasi $[ABC]$ menyatakan luas dari segitiga ABC . Selanjutnya kita peroleh

$$\frac{[AEP]}{[ACD]} = \frac{AE \cdot AP}{AC \cdot AD} \text{ dan } \frac{[APF]}{[ABD]} = \frac{AF \cdot AP}{AB \cdot AD}$$

dan karena

$$[AEP] + [APF] = [AEF]$$

maka diperoleh

$$\frac{AE \cdot AP}{AC \cdot AD} [ACD] + \frac{AF \cdot AP}{AB \cdot AD} [ABD] = [AEF]$$

Bagi kedua ruas dengan $[ABC]$, dan mengingat kita juga punya

$$\frac{[ACD]}{[ABC]} = \frac{CD}{BC}, \quad \frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{dan} \quad \frac{[AEF]}{[ABC]} = \frac{AE \cdot AF}{AC \cdot AB}$$

akibatnya diperoleh

$$\frac{AE \cdot AP}{AC \cdot AD} \cdot \frac{CD}{BC} + \frac{AF \cdot AP}{AB \cdot AD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{AE \cdot AF}{AC \cdot AB}$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{AD \cdot BC \cdot AC \cdot AB}{AP \cdot AE \cdot AF}$, sehingga didapatkan

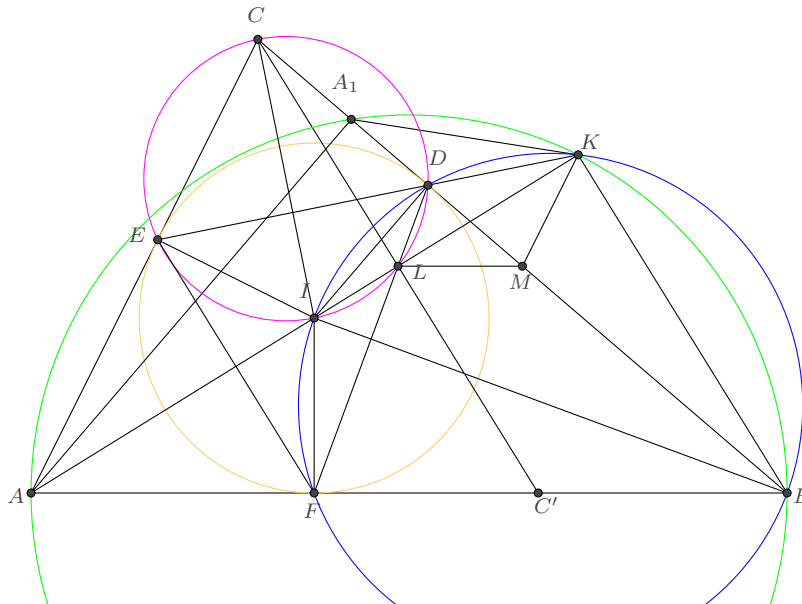
$$\frac{AB}{AF} \cdot CD + \frac{AC}{AE} \cdot BD = \frac{AD}{AP} \cdot BC$$

seperti yang diinginkan dalam soal. $\square$

10. (OSN SMA 2009) Diberikan segitiga ABC lancip. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA , dan AB berturut-turut di D, E , dan F . Garis bagi sudut A memotong DE dan DF berturut-turut di K dan L . Misalkan AA_1 adalah garis tinggi dan M titik tengah BC .

- (a) Buktikan bahwa BK dan CL tegak lurus garis bagi sudut BAC
- (b) Tunjukkan bahwa A_1KML adalah segiempat talibusur

Penyelesaian : Misalkan I adalah titik pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$. Perhatikan bahwa untuk kasus $AC = AB$ maka pernyataan pada soal pasti benar, sebab $A_1 = K = M = L$. Oleh karena itu, tanpa mengurangi keumuman, misalkan $AB > AC$



- a. Untuk menunjukkan $BK \perp AK$ cukup ditunjukkan bahwa segiempat $BKDI$ adalah segiempat talibusur. Padahal kita memiliki

$$\begin{aligned}
 \angle KDB &= \angle CDE = \angle EFD = \angle EFI + \angle IFD \\
 &= \angle EAI + \angle IBD \\
 &= (90^\circ - \angle AIF) + (90^\circ - \angle BIF) \\
 &= 180^\circ - (\angle AIF + \angle BIF) \\
 &= \angle KIB
 \end{aligned}$$

Sehingga terbukti $BKDI$ adalah segiempat talibusur. Akibatnya $\angle BKI = \angle BDI = 90^\circ$.

Demikian pula untuk menunjukkan $CL \perp AL$, cukup ditunjukkan segiempat $CILD$ adalah segiempat talibusur. Padahal kita peroleh bahwa

$$\begin{aligned}
 \angle CIL &= 180^\circ - (\angle AIE + \angle CIE) \\
 &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle CAB + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA) \\
 &= \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle BCA) \\
 &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC \\
 &= \angle FIB = \angle FDB
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $CILD$ adalah segiempat talibusur. Sehingga $\angle CLI = \angle CDI = 90^\circ$.

- b. Misalkan C' adalah titik pada AB sehingga $AC = AC'$. Perhatikan, karena $CL \perp AL$ dan AL adalah garis bagi $\angle CAC'$ maka C, L, C' segaris dan L adalah titik tengah CC' . Akibatnya LM sejajar AB . Dengan mengingat pula bahwa $ABKA_1$ adalah segiempat talibusur kita peroleh

$$\angle A_1ML = \angle A_1BA = \angle A_1KA = \angle A_1KL$$

Jadi, terbukti bahwa A_1KML adalah segiempat talibusur.

Bashing Time : Cara lain yang bisa digunakan untuk menyelesaikan soal ini adalah dengan Bilangan Complex. Untuk itu, setting I sebagai origin, lingkaran dalam $\triangle ABC$ sebagai unit circle dan garis bagi $\angle A$ sebagai sumbu riil. Maka diperoleh persamaan garis

bagi $\angle A$ yaitu $z - \bar{z} = 0$. Selain itu kita juga punya,

$$\begin{aligned} f = \bar{e} = \frac{1}{e} &\Rightarrow ef = 1 \\ a = \frac{2}{e+f}, \quad b = \frac{2df}{d+f}, \quad c = \frac{2de}{d+e} \\ m = \frac{de}{d+e} + \frac{df}{d+f} \end{aligned}$$

Persamaan garis DE yaitu $z + de\bar{z} = d + e$, persamaan garis DF yaitu $z + df\bar{z} = d + f$ dan persamaan garis BC yaitu $z + d^2\bar{z} = 2d$. Sementara persamaan garis AA_1 yaitu

$$\begin{aligned} \frac{z-a}{b-c} &= -\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} \\ \Leftrightarrow \frac{z - \frac{2}{e+f}}{\frac{2df}{d+f} - \frac{2de}{d+e}} &= -\frac{\bar{z} - \frac{2}{e+f}}{\frac{2}{d+f} - \frac{2}{d+e}} \\ \Leftrightarrow z(e+f) - 2 &= d^2(e+f)\bar{z} - 2d^2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dengan memotongkan garis DE dan sumbu riil diperoleh titik K yaitu

$$k = \frac{d+e}{de+1}$$

dengan memotongkan garis DF dan sumbu riil diperoleh titik L yaitu

$$l = \frac{d+f}{df+1}$$

sementara itu dengan memotongkan garis AA_1 dan garis BC diperoleh titik A_1 yaitu

$$a_1 = \frac{de + df - d^2 + 1}{e+f}$$

- a. Untuk membuktikan $BK \perp KI$ cukup ditunjukkan $X = \frac{b-k}{i-k}$ bernilai imajiner. Padahal kita memiliki

$$\begin{aligned} X &= \frac{b-k}{i-k} = \frac{\frac{2df}{d+f} - \frac{d+e}{de+1}}{0 - \frac{d+e}{de+1}} \\ &= -\frac{\frac{2df}{d+f}}{\frac{d+e}{de+1}} + 1 \\ &= -\frac{\frac{2d}{de+1}}{\frac{d+e}{de+1}} + 1 \\ &= \frac{e-d}{d+e} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\bar{X} = \frac{\bar{e} - \bar{d}}{\bar{d} + \bar{e}} = \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{d} + \frac{1}{e}} = \frac{d-e}{d+e} = -X$$

Jadi, terbukti $X = \frac{b-k}{i-k}$ bernilai imajiner, sehingga terbukti pula $BK \perp KI$.

Untuk membuktikan bahwa $CL \perp LI$ dapat dilakukan dengan komputasi serupa.

b. Untuk membuktikan A_1KML adalah segiempat talibusur, maka cukup ditunjukkan

$$Y = \frac{a_1 - k}{m - k} : \frac{a_1 - l}{m - l}$$

bernilai riil. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{a_1 - k}{m - k} &= \frac{\frac{de+df-d^2+1}{e+f} - \frac{d+e}{de+1}}{\frac{de}{d+e} + \frac{df}{d+f} - \frac{d+e}{de+1}} \\ &= \frac{\frac{de^2+d-d^2e+e}{e^2+1} - \frac{d+e}{de+1}}{\frac{de}{d+e} + \frac{d}{de+1} - \frac{d+e}{de+1}} \\ &= \frac{\frac{e^2(e-d)(d^2-1)}{(e^2+1)(de+1)}}{\frac{e^2(d^2-1)}{(d+e)(de+1)}} \\ &= \frac{e^2 - d^2}{e^2 + 1} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{a_1 - l}{m - l} &= \frac{\frac{de+df-d^2+1}{e+f} - \frac{d+f}{df+1}}{\frac{de}{d+e} + \frac{df}{d+f} - \frac{d+f}{df+1}} \\ &= \frac{\frac{de^2+d-d^2e+e}{e^2+1} - \frac{de+1}{d+e}}{\frac{de}{d+e} + \frac{d}{de+1} - \frac{de+1}{d+e}} \\ &= \frac{\frac{(d^2-1)(1-de)}{e^2+1}}{\frac{d^2-1}{de+1}} \\ &= \frac{1 - d^2e^2}{e^2 + 1} \end{aligned}$$

sehingga

$$Y = \frac{e^2 - d^2}{e^2 + 1} : \frac{1 - d^2e^2}{e^2 + 1} = \frac{e^2 - d^2}{1 - d^2e^2}$$

akibatnya

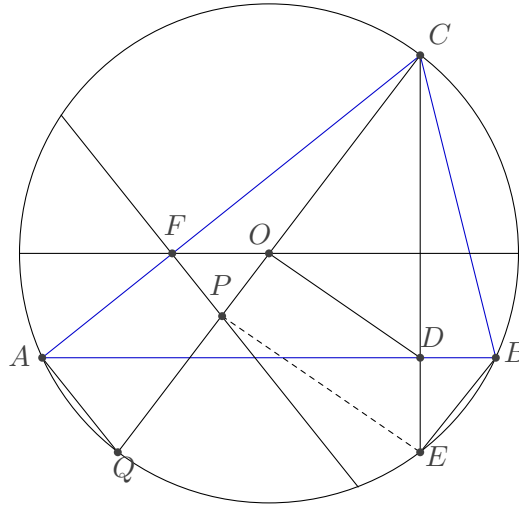
$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{e^2} - \frac{1}{d^2}}{1 - \frac{1}{d^2e^2}} = \frac{d^2 - e^2}{d^2e^2 - 1} = Y$$

jadi, terbukti bahwa Y adalah riil, maka terbukti A_1KML adalah segiempat talibusur.

Catatan : dengan Complex solusi soal ini memang jadi jauh lebih panjang daripada solusi sintetisnya. Namun demikian, ide penyelesaiannya lebih mudah didapat dan tinggal main di komputasi aljabar saja. $\square$

11. (OSN SMA 2010) Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AC > BC$ dan titik pusat lingkaran luar O . Garis tinggi segitiga ABC dari C memotong AB dan lingkaran luar segitiga ABC lagi berturut-turut di titik D dan E . Garis melalui O sejajar AB memotong garis AC di titik F . Buktikan bahwa garis CO , garis melalui F tegak lurus AC , dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik.

Penyelesaian : Misalkan garis CO dan garis melalui F tegak lurus AC berpotongan di titik P . Misalkan pula perpanjangan CP memotong lingkaran di Q (seperti pada gambar di bawah ini)



Untuk menunjukkan bahwa ketiga garis yang dimaksud berpotongan di satu titik (dalam hal ini titik P) maka cukup ditunjukkan bahwa OD sejajar PE .

Perhatikan bahwa CQ adalah diameter lingkaran, sehingga $\angle CAQ = 90^\circ = \angle CFP$. Akibatnya $\angle CPF = \angle CQA$. Padahal $\angle CQA = \angle ABC$, sehingga diperoleh $\angle CPF = \angle ABC$. Oleh karena itu, $\triangle CFP$ sebangun dengan $\triangle CBD$. Sehingga berlaku

$$\frac{BC}{CP} = \frac{CD}{CF} \iff BC \cdot CF = CD \cdot CP \quad \dots\dots *)$$

Selanjutnya, perhatikan juga bahwa $\angle BEC = \angle BAC = \angle CFO$ sehingga $\triangle CBE$ sebangun dengan $\triangle CFO$. Sehingga berlaku pula

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CO}{BC} \iff BC \cdot CF = CO \cdot CE \quad \dots\dots **)$$

Dari persamaan *) dan **) diperoleh

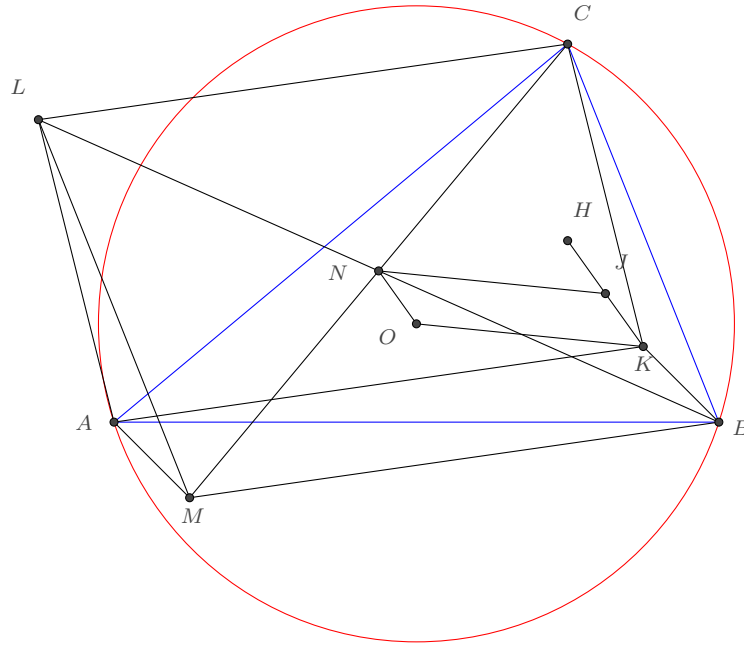
$$CD \cdot CP = CO \cdot CE \iff \frac{CD}{CE} = \frac{CO}{CP}$$

Akibatnya $\triangle COD$ sebangun dengan $\triangle CPE$. Sehingga terbukti OD sejajar PE .

Jadi, terbukti garis CO , garis melalui F tegak lurus AC , dan garis melalui E sejajar DO bertemu di titik P . $\square$

12. (OSN SMA 2010) Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi H . Misalkan K sebarang titik didalam segitiga ABC yang tidak sama dengan O maupun H . Titik L dan M terletak diluar segitiga ABC sedemikian sehingga $AKCL$ dan $AKBM$ jajargenjang. Terakhir, misalkan BL dan CM berpotongan di titik N dan misalkan juga J adalah titik tengah HK . Buktikan bahwa $KONJ$ jajargenjang.

Penyelesaian : Perhatikan gambar di bawah ini!



Karena $AKBM$ dan $AKCL$ keduanya jajargenjang maka diperoleh $MB \parallel AK \parallel LC$ dan $MB = AK = LC$. Akibatnya, $MBCL$ juga merupakan jajargenjang.

Selanjutnya akan diselesaikan soal ini dengan bantuan Complex. Untuk itu setting O sebagai origin. Sehingga diperoleh $h = a + b + c$. Karena $AKBM$ jajargenjang maka

$$a + b = k + m \Rightarrow m = a + b - k$$

Selain itu, N adalah titik tengah CM akibatnya

$$n = \frac{c + m}{2} = \frac{c + a + b - k}{2}$$

dan karena J titik tengah HK , maka

$$j = \frac{h+k}{2} = \frac{a+b+c+k}{2}$$

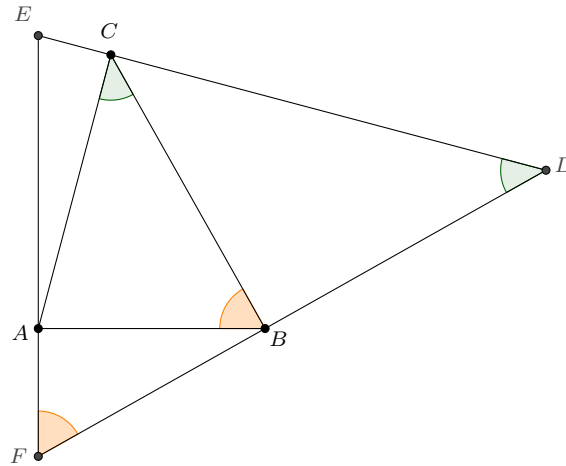
Oleh karena itu, diperoleh

$$o+j = \frac{a+b+c+k}{2} = \frac{c+a+b-k}{2} + k = n+k$$

sehingga terbukti $KONJ$ adalah jajargenjang. $\square$

13. (OSN SMA 2011) Diberikan sebarang segitiga lancip ABC . Misalkan ℓ_a garis yang melalui A dan tegak lurus AB , ℓ_b garis yang melalui B dan tegak lurus BC , ℓ_c garis yang melalui C dan tegak lurus CA . Misalkan garis ℓ_b dan ℓ_c berpotongan di titik D , garis ℓ_c dan ℓ_a berpotongan di titik E dan terakhir garis ℓ_a dan ℓ_b berpotongan di titik F . Buktikan bahwa luas segitiga DEF paling sedikit tiga kali luas segitiga ABC .

Penyelesaian : Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan bahwa,

$$\angle FDE = 90^\circ - \angle BCD = \angle BCA$$

dan

$$\angle EFD = 90^\circ - \angle ABF = \angle ABC$$

sehingga $\triangle DEF$ sebangun dengan $\triangle CAB$. Dengan kata lain, untuk membuktikan $[DEF] \geq 3[ABC]$ cukup ditunjukkan

$$\frac{EF}{AB} \geq \sqrt{3}$$

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan koordinat $A(0,0)$, $B(1,0)$ dan $C(p,r)$ dengan p dan r bilangan real positif. Selanjutnya diperoleh, persamaan garis ℓ_b yaitu

$$y = \frac{1-p}{r}(x-1)$$

sehingga koordinat $F\left(0, \frac{p-1}{r}\right)$.

Demikian pula diperoleh persamaan garis ℓ_c yaitu

$$y = \frac{-p}{r}(x-p) + r$$

sehingga koordinat $E\left(0, \frac{p^2+r^2}{r}\right)$.

Oleh karena itu panjang EF adalah

$$\begin{aligned} EF &= \frac{p^2+r^2}{r} - \frac{p-1}{r} \\ &= \frac{p^2 - p + \frac{1}{4} + r^2 - \sqrt{3}r + \frac{3}{4} + \sqrt{3}r}{r} \\ &= \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{r} + \sqrt{3} \\ &\geq \sqrt{3} \end{aligned}$$

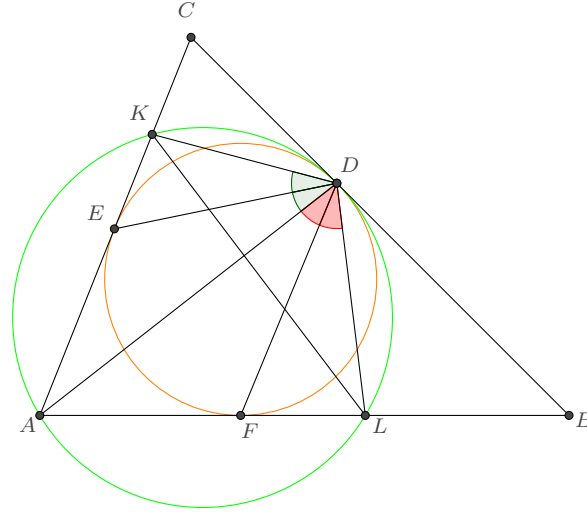
akan tetapi karena panjang AB adalah 1 satuan, maka diperoleh

$$\frac{EF}{AB} \geq \sqrt{3}$$

seperti yang diharapkan. □

14. (*OSN SMA 2011*) Diberikan segitiga sebarang ABC dan misalkan lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung sisi BC , CA dan AB berturut - turut di titik D , E dan F . Misalkan K dan L berturut - turut titik pada sisi CA dan AB sehingga $\angle EDK = \angle ADE$ dan $\angle FDL = \angle ADF$. Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga AKL menyinggung lingkaran dalam segitiga ABC

Penyelesaian : Misalkan γ dan ω berturut-turut menyatakan lingkaran dalam segitiga ABC dan lingkaran luar segitiga AKL .



kita memiliki

$$\begin{aligned}\angle EAD + \angle ADE &= \angle CED = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA \\ \angle FAD + \angle ADF &= \angle DFB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC\end{aligned}$$

tambahkan kedua persamaan di atas, sehingga didapat

$$\angle CAB + \angle ADE + \angle ADF = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA)$$

kalikan kedua ruas dengan 2,

$$\begin{aligned}2\angle CAB + 2\angle ADE + 2\angle ADF &= 360^\circ - (\angle ABC + \angle BCA) \\ \Leftrightarrow 2\angle CAB + \angle ADK + \angle ADL &= 360^\circ - (180^\circ - \angle CAB) \\ \Leftrightarrow \angle CAB + \angle LDK &= 180^\circ\end{aligned}$$

sehingga $ALDK$ adalah segiempat talibusur. Karena BD adalah garis singgung lingkaran γ , maka untuk menunjukkan bahwa ω menyinggung γ , cukup ditunjukkan bahwa BD juga merupakan garis singgung lingkaran ω . Atau cukup ditunjukkan $\angle LAD = \angle LDB$.

Padahal kita punya

$$\angle LAD + \angle ADF = \angle DFB = \angle FDB = \angle FDL + \angle LDB$$

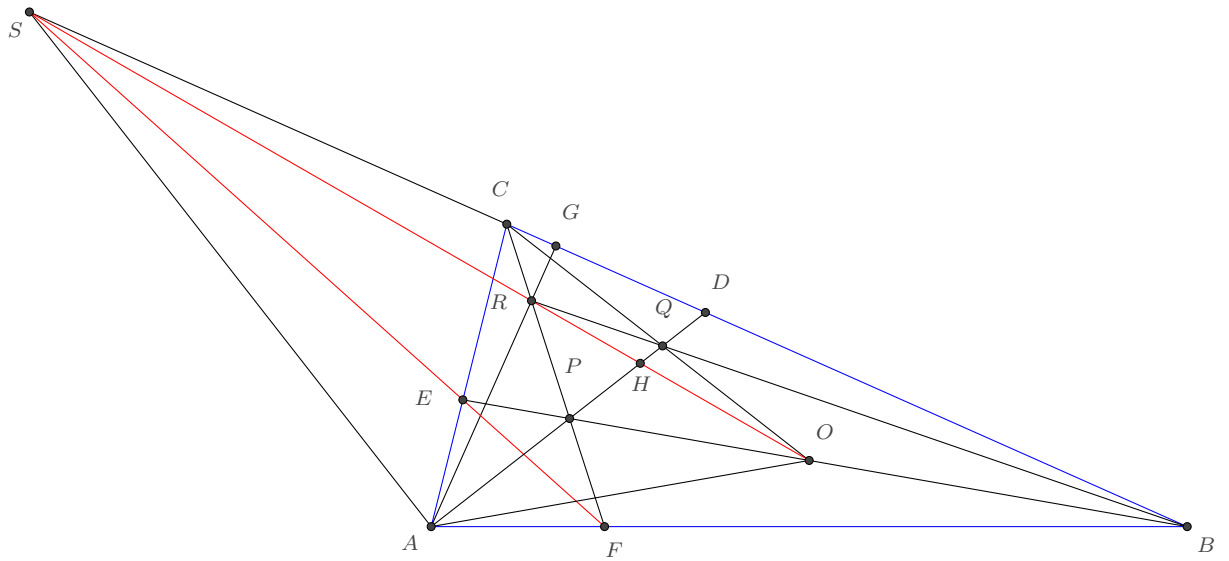
tetapi karena $\angle FDL = \angle ADF$, maka diperoleh $\angle LAD = \angle LDB$.

Jadi, terbukti BD adalah garis singgung lingkaran ω . Sehingga lingkaran γ dan ω bersinggungan di D .

□

15. (OSN SMA 2012) Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB > AC$ dan memiliki titik pusat lingkaran luar O . Garis BO dan CO memotong garis bagi $\angle BAC$ berturut-turut di titik P dan Q . Selanjutnya garis BQ dan CP berpotongan di titik R . Buktikan bahwa garis AR tegak lurus terhadap garis BC .

Penyelesaian : Perpanjang AP, BP dan CP sehingga berturut-turut memotong sisi BC, CA, AB di D, E dan F . Misalkan pula garis AR memotong BC di G . Serta OR dan AQ berpotongan di H , seperti terlihat pada gambar berikut,



Titik S adalah perpotongan antara transversal FE dan perpanjangan BC , akibatnya (B, D, C, S) harmonik. Karena $\angle CAD = \angle BAD$ berakibat $\angle DAS = 90^\circ$. Perhatikan pula bahwa (O, H, R, P) juga harmonik, hal ini dikarenakan pensil $P(B, D, C, S)$ harmonik. Padahal, $\angle HAS = \angle DAS = 90^\circ$, sehingga $\angle OAH = \angle RAH$. Dengan demikian diperoleh

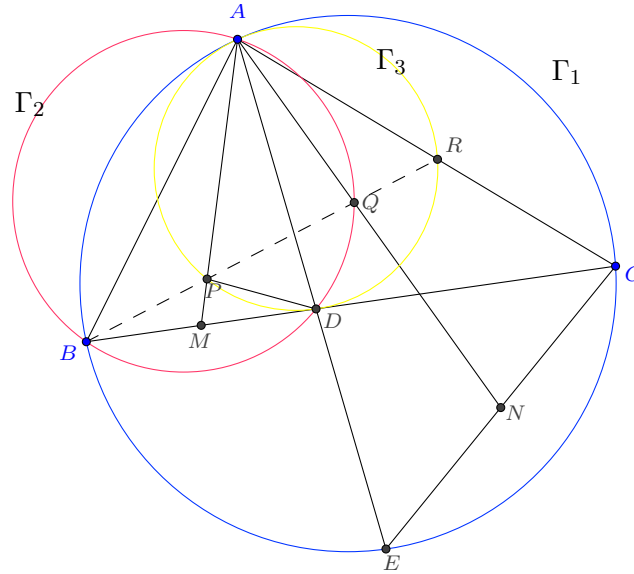
$$\angle GAC = \angle OAB = 90^\circ - \angle BCA = 90^\circ - \angle GCA$$

sehingga terbukti $AG \perp GC$ yang juga berarti AR tegak lurus BC . $\square$

16. (OSN SMA 2012) Diberikan sebarang segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC dan lingkaran luar segitiga ABC berturut-turut di D dan E . Misalkan M dan N berturut-turut titik tengah BD dan CE . Lingkaran luar segitiga ABD memotong AN di titik Q . Lingkaran yang melalui A dan menyinggung BC di D memotong garis AM dan

sisi AC berturut-turut di titik P dan R . Tunjukkan bahwa empat titik B, P, Q, R terletak pada satu garis.

Penyelesaian :



Perhatikan bahwa $\angle ABC = \angle AEC$ dan $\angle BAD = \angle EAC$. Oleh karena itu, $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ yang berakibat

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EC} = \frac{2BM}{2EN} = \frac{BM}{EN}$$

sehingga $\triangle ABM \sim \triangle AEN$. Dengan cara serupa diperoleh pula $\triangle AMD \sim \triangle ANC$. Dari dua kesebangunan ini diperoleh $\angle BAM = \angle EAN$ dan $\angle MAD = \angle NAC$.

Lemma 1. B, P, Q segaris.

Bukti. Diketahui bahwa MD adalah garis singgung lingkaran Γ_3 sehingga berlaku $MD^2 = MP \cdot MA$. Karena $BM = MD$ maka diperoleh

$$BM^2 = MP \cdot MA \Leftrightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{MP}{BM}$$

yang berakibat $\triangle BMP \sim \triangle AMB$. Sehingga berlaku

$$\angle DBP = \angle MBP = \angle MAB = \angle EAN = \angle DAQ = \angle DBQ$$

Jadi, terbukti B, P, Q segaris.

Lemma 2. P, Q, R segaris.

Bukti. Karena MD adalah garis singgung maka $\angle MDP = \angle MAD$. Selanjutnya didapat,

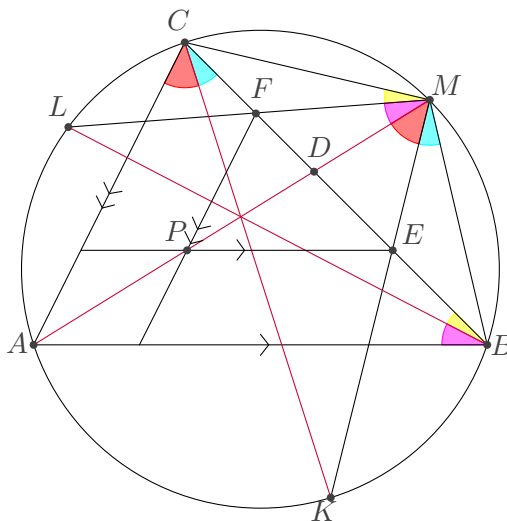
$$\begin{aligned}
 \angle DPQ &= \angle DBP + \angle BDP \\
 &= \angle DBQ + \angle MDP \\
 &= \angle DAQ + \angle MAD \\
 &= \angle DAQ + \angle NAC \\
 &= \angle DAC \\
 &= \angle DAR \\
 &= \angle DPR
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti P, Q, R segaris.

Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 dapat disimpulkan bahwa B, P, Q, R segaris. $\square$

17. (OSN SMA 2013) Diberikan segitiga lancip ABC dengan lingkaran luar ω . Garis bagi $\angle BAC$ memotong ω di titik M . Misalkan P suatu titik pada garis AM dengan P di dalam segitiga ABC . Garis melalui P yang sejajar AB dan garis melalui P yang sejajar AC memotong sisi BC berturut-turut di titik E dan F . Garis ME dan MF memotong ω lagi berturut-turut di titik K dan L . Buktikan bahwa garis-garis AM, BL dan CK konkuren.

Penyelesaian : Perhatikan gambar di bawah ini!



Misalkan D adalah perpotongan garis AM dan sisi BC . Untuk membuktikan AM, BL dan CK konkuren, berdasarkan *Dalil Ceva* (versi trigonometri) cukup ditunjukkan

$$\frac{\sin \angle CBL}{\sin \angle ABL} \cdot \frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle CAM} \cdot \frac{\sin \angle ACK}{\sin \angle BCK} = 1$$

karena $\sin \angle BAM = \sin \angle CAM$ maka tinggal ditunjukkan

$$\frac{\sin \angle CBL}{\sin \angle ABL} \cdot \frac{\sin \angle ACK}{\sin \angle BCK} = 1$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{\sin \angle CBL}{\sin \angle ABL} = \frac{\sin \angle CMF}{\sin \angle DMF} = \frac{DM \cdot CF}{CM \cdot DF}$$

dan

$$\frac{\sin \angle ACK}{\sin \angle BCK} = \frac{\sin \angle DME}{\sin \angle BME} = \frac{BM \cdot DE}{DM \cdot BE}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\sin \angle CBL}{\sin \angle ABL} \cdot \frac{\sin \angle ACK}{\sin \angle BCK} = \frac{DM \cdot CF}{CM \cdot DF} \cdot \frac{BM \cdot DE}{DM \cdot BE} = \frac{CF \cdot DE}{DF \cdot BE}$$

karena $CM = BM$.

Oleh karena itu, hanya perlu ditunjukkan

$$\frac{CF \cdot DE}{DF \cdot BE} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CF}{DF} = \frac{BE}{DE}$$

Padahal kita punya

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AP}{DP} = \frac{CF}{DF}$$

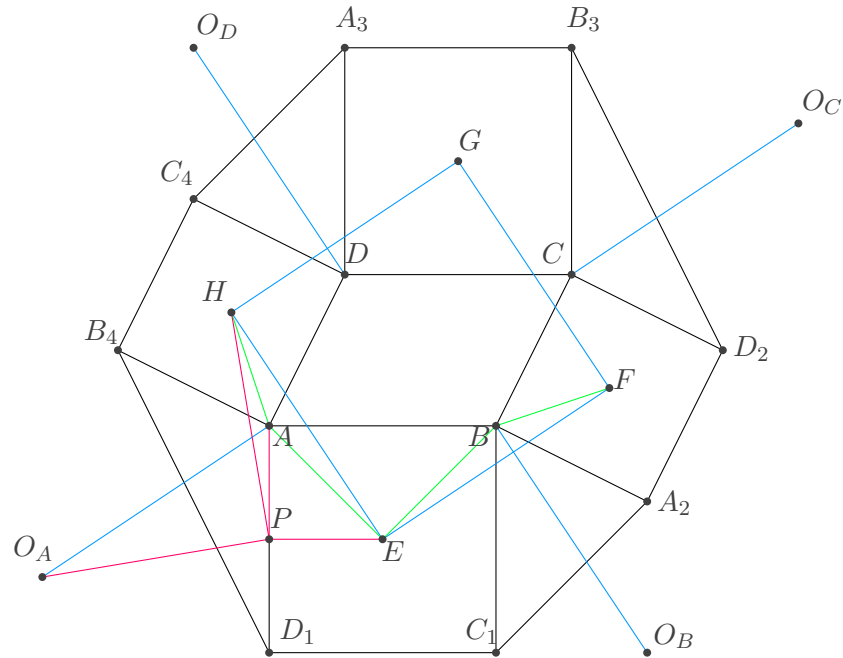
seperti yang diharapkan.

Jadi, terbukti garis-garis AM, BL dan CK konkuren. $\square$

18. (*OSN SMA 2013*) Diberikan jajar genjang $ABCD$. Pada sisi luar jajar genjang, di-konstruksi persegi-persegi $ABC_1D_1, BCD_2A_2, CDA_3B_3$ dan DAB_4C_4 . Pada sisi-sisi luar B_4D_1, C_1A_2, D_2B_3 , dan A_3C_4 dari segitiga-segitiga $AB_4D_1, BC_1A_2, CD_2B_3$, dan DA_3C_4 , konstruksi persegi-persegi lagi dengan pusat berturut-turut O_A, O_B, O_C dan O_D . Buktikan bahwa

$$AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$$

Penyelesaian : Misal E, F, G, H berturut-turut adalah titik pusat persegi-persegi $ABC_1D_1, BCD_2A_2, CDA_3B_3$ dan DAB_4C_4 , sebagaimana terlihat pada gambar di bawah ini



Perhatikan bahwa $AH = BF$, $AE = BE$ dan $\angle HAE = \angle FBE$ dengan demikian $\triangle HAE \cong \triangle FBE$ sehingga $HE = EF$. Dengan cara serupa diperoleh pula $EF = FG$, $FG = GH$, dan $GH = HE$. Jadi, diperoleh

$$EF = FG = GH = HE$$

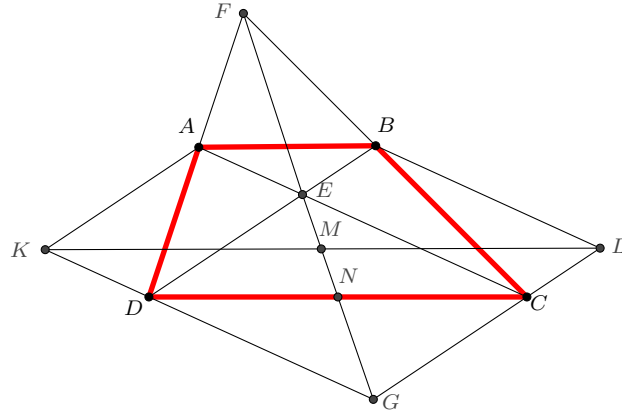
Misalkan P adalah titik tengah sisi AD_1 diperoleh $O_A P = HP$ dan $\angle O_A P H = 90^\circ$ akibatnya $\angle O_A P A = \angle E P H$. Karena $AP = PE$ diperoleh $\triangle O_A P A \cong \triangle E P H \implies AO_A = HE$. Dengan cara serupa kita peroleh pula $BO_B = EF$, $CO_C = FG$ dan $DO_D = GH$. Karena $EF = FG = GH = HE$, diperoleh

$$AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$$

Terbukti. □

19. (OSN SMA 2014) Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F . Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL .

Penyelesaian : Perpanjang garis KD dan LC sehingga berpotongan di titik G . Karena $DG \parallel EC$ dan $DE \parallel GC$ maka $DGCE$ adalah jajargenjang. Misalkan pula diagonal DC dan EG berpotongan di N . Jelas bahwa N adalah titik tengah DC .



Misalkan pula perpanjangan garis FE memotong DC di N' . Berdasarkan dalil Ceva diperoleh

$$\frac{FA}{AD} \cdot \frac{DN'}{N'C} \cdot \frac{CB}{BF} = 1$$

Namun karena AB sejajar DC , kita juga punya

$$\frac{FA}{AD} = \frac{FB}{BC}$$

akibatnya diperoleh $DN' = N'C$, yang berarti $N = N'$. Oleh karena itu, bisa disimpulkan bahwa titik-titik F, E, N, G segaris.

Perhatikan bahwa kita juga memiliki

$$\frac{GD}{DK} = \frac{CE}{EA} = \frac{DE}{EB} = \frac{GC}{CL}$$

sehingga DC sejajar KL .

Misalkan FG dan KL berpotongan di M , diperoleh

$$\frac{KM}{DN} = \frac{MG}{NG} = \frac{ML}{NC}$$

ingat bahwa $DN = NC$, akibatnya $KM = ML$. Jadi, terbukti bahwa garis FE melalui titik tengah segmen KL .

Bashing Time : Solusi lain untuk soal ini bisa juga dengan Complex. Misalkan garis FE memotong AB dan DC berturut-turut di X dan Y . Mudah dibuktikan dengan bantuan dalil Ceva (sebagaimana solusi sebelumnya), bahwa Y adalah titik tengah DC . Perhatikan juga bahwa, dilatasi dengan pusat F dan faktor skala $\frac{FA}{FD}$ membawa $D \rightarrow A, C \rightarrow B, Y \rightarrow X$. Jadi, X juga merupakan titik tengah AB . Selanjutnya setting E sebagai origin dan garis FE sebagai sumbu riil.

Karena $AEDK$ jajargenjang maka

$$k + e = a + d \Rightarrow k = a + d$$

demikian pula $BECL$ juga merupakan jajargenjang, sehingga

$$l + e = b + c \Rightarrow l = b + c$$

Misalkan M adalah titik tengah KL maka untuk menunjukkan bahwa M terletak pada garis FE cukup ditunjukkan bahwa M bernilai riil. Padahal kita memiliki

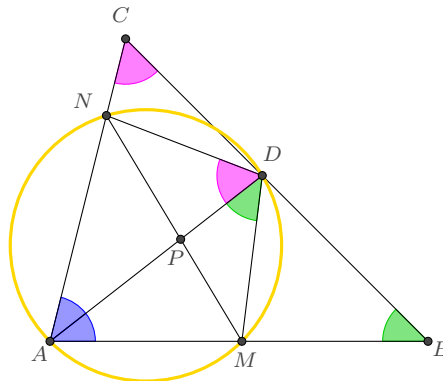
$$m = \frac{k + l}{2} = \frac{a + d + b + c}{2} = \frac{a + b}{2} + \frac{d + c}{2} = x + y$$

yang jelas bernilai riil, sebab X dan Y terletak pada sumbu riil. $\square$

20. (OSN SMA 2014) Diberikan segitiga ABC dengan AD sebagai garis bagi dalam $\angle BAC$. Misalkan titik M dan N berturut-turut pada AB dan AC sehingga $\angle MDA = \angle ABC$ dan $\angle NDA = \angle ACB$. Jika P merupakan titik potong dari garis AD dan garis MN , buktikan bahwa

$$AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$$

Penyelesaian : Perhatikan gambar di bawah ini!



Karena segitiga AMD dan segitiga ADB sebangun maka diperoleh

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AD} \Leftrightarrow AD^2 = AB \cdot AM \quad \dots(1)$$

Selain itu, segitiga AND dan segitiga ADC sebangun, akibatnya

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AN}{AD} \Leftrightarrow AD^2 = AC \cdot AN \quad \dots(2)$$

Perhatikan pula bahwa

$$\angle MAN + \angle MDN = \angle BAC + \angle MDA + \angle NDA = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

Jadi, $AMDN$ adalah segiempat talibusur. Akibatnya diperoleh $\angle MDA = \angle ANP$. Sehingga dipunyai segitiga AMD sebangun dengan segitiga APN . Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AD}{AN} \Leftrightarrow AP = \frac{AM \cdot AN}{AD} \quad \dots(3)$$

Dari pers.(1) dan pers.(2) diperoleh

$$AD^4 = AB \cdot AC \cdot AM \cdot AN \Leftrightarrow AD^3 = AB \cdot AC \cdot \frac{AM \cdot AN}{AD}$$

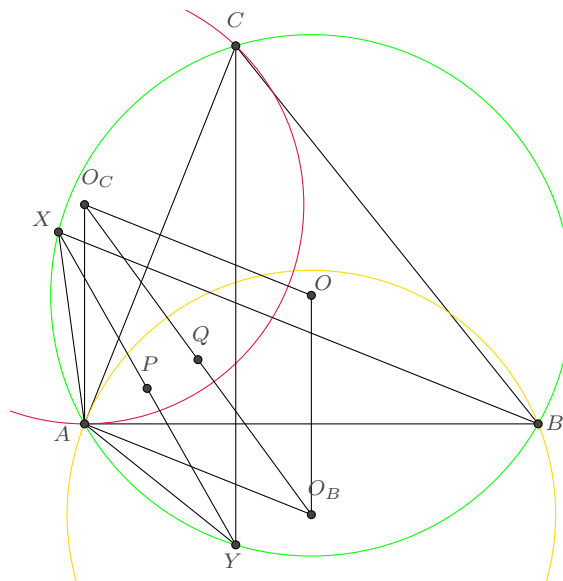
Namun dengan memperhatikan pers.(3) diperoleh

$$AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$$

seperti yang diharapkan. □

21. (OSN SMA 2015) Diberikan segitiga lancip ABC . Lingkaran Γ_B adalah lingkaran yang melewati AB dan menyinggung AC pada A dan berpusat di O_B . Definisikan yang serupa untuk Γ_C dan O_C . Misalkan garis tinggi segitiga ABC dari B dan C memotong lingkaran luar segitiga ABC pada X dan Y . Buktikan A , titik tengah XY , dan titik tengah O_BO_C segaris.

Penyelesaian : Misalkan P dan Q berturut-turut adalah titik tengah XY dan titik tengah O_BO_C . Misalkan pula O pusat lingkaran luar segitiga ABC .



Lemma 1. Titik A, Q dan O segaris.

Bukti. Perhatikan bahwa $AO_C \perp AB$ dan $AO_B BO$ adalah layang-layang sehingga $O_B O \perp AB$. Oleh karena itu, AO_C sejajar $O_B O$. Dengan cara serupa diperoleh AO_B sejajar $O_C O$. Jadi, $AO_B O O_C$ adalah jajargenjang. Karena Q titik tengah $O_B O_C$ maka A, Q dan O segaris.

Lemma 2. Titik A, P dan O segaris.

Bukti. Perlu diperhatikan bahwa

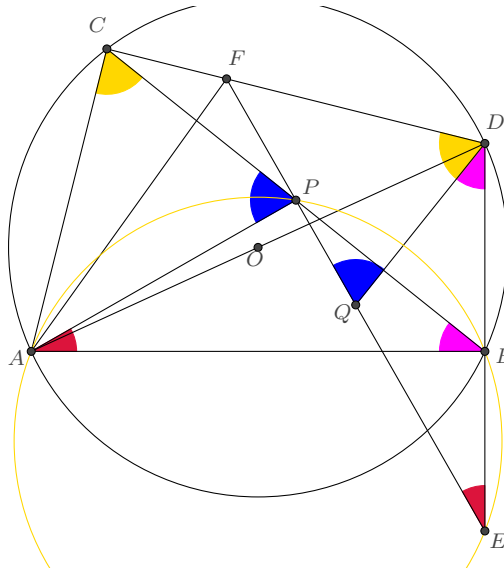
$$\angle ACY = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABX$$

Hal ini berakibat $AX = AY$. Oleh karena itu, AXY adalah segitiga samakaki, sehingga didapat $\angle APX = 90^\circ$. Namun karena OXY juga merupakan segitiga samakaki maka $\angle OPX = 90^\circ$. Jadi. A, P, O segaris.

Dari lemma 1 dan lemma 2 dapat disimpulkan bahwa titik A, P dan Q segaris. $\square$

22. (OSN SMA 2015) Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O . Garis AO memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik D . Misalkan P titik pada sisi BC . Garis melalui P yang tegak lurus AP memotong garis DB dan DC berturut-turut di titik E dan F . Garis melalui D tegak lurus BC memotong EF di titik Q . Buktikan bahwa $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = CP$

Penyelesaian : Perhatikan gambar berikut!



Karena $\angle APE = 90^\circ = \angle ABE$ maka $APBE$ adalah segiempat talibusur, akibatnya

$$\angle QED = \angle PAB$$

Selain itu kita juga punya

$$\angle EDQ = 90^\circ - \angle CBD = \angle ABP$$

maka $\triangle EDQ$ sebangun dengan $\triangle ABP$. Akibatnya

$$\frac{EQ}{AP} = \frac{QD}{BP} \Leftrightarrow AP \cdot QD = EQ \cdot BP \quad \dots\dots\dots(1)$$

serta

$$\angle EQD = \angle APB$$

oleh karena itu diperoleh,

$$\angle FQD = \angle APC$$

Perhatikan juga bahwa kita memiliki

$$\angle ACP = \angle ADB = \angle BDQ + \angle QDO = \angle ABP + \angle QDO = \angle ADC + \angle QDO = \angle FDQ$$

Jadi, $\triangle FDQ$ sebangun dengan $\triangle APC$. Maka diperoleh

$$\frac{QD}{PC} = \frac{FQ}{AP} \Leftrightarrow AP \cdot QD = PC \cdot FQ \quad \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$EQ \cdot BP = PC \cdot FQ$$

atau ekuivalen dengan

$$\frac{EQ}{FQ} = \frac{PC}{BP}$$

yang berarti $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = PC$, seperti yang diharapkan □