

ALJABAR DAN TRIGONOMETRI MENUJU

OLIMPIADE

MATEMATIKA

- Berisi kumpulan soal yang pernah dilombakan pada Olimpiade Matematika SMA tingkat Kabupaten/Kota, Provinsi, Nasional, dan Internasional (United States of America Mathematics Olympiad (USAMO))
- Materi diulas secara tuntas, konkret, dan terstruktur sehingga mudah dipahami oleh siswa

Penulis:

Bimmo Dwi Baskoro, S.Si.

SINOPSIS

Naskah ini disusun untuk membantu siswa-siswi ataupun khalayak umum yang berminat besar dalam bidang matematika. Perlu disadari bahwa tidak semua materi soal yang muncul pada kompetisi sekelas olimpiade matematika tercakup dalam kurikulum reguler di SD, SMP, bahkan SMA. Oleh karena itu, diperlukan upaya lebih besar dalam mengenalkan soal olimpiade matematika dengan berbagai solusi yang sifatnya dapat merangsang siswa ataupun khalayak umum untuk berpikir secara kreatif.

Naskah ini diharapkan dapat dipelajari untuk digunakan sebagai alat bantu dalam menghadapi kompetisi matematika, khususnya olimpiade matematika. Rincian pembahasan dalam naskah ini terdiri atas kumpulan berbagai soal aljabar dan trigonometri yang digunakan dalam berbagai kompetisi olimpiade matematika nasional maupun internasional. Penulis sengaja memisahkannya dalam bertahap agar para siswa dapat dengan mudah mempelajari naskah ini secara bertahap. Kemudian, setelah dibekali taktik dan strategi pemecahan masalah, penulis sertakan pula latihan soal tanpa pembahasan di akhir bab untuk mengevaluasi pemahaman siswa. Sasaran yang ingin dicapai setelah siswa mempelajari naskah ini dengan baik adalah:

- memperoleh pengetahuan dasar dan pola pikir bermatematika;
- memperoleh daya nalar dan kreativitas yang tinggi setelah diberikan taktik dan strategi dalam pemecahan soal olimpiade matematika khususnya aljabar dan trigonometri;
- dapat dengan mudah menerjemahkan suatu kasus ke dalam bahasa matematika; dan
- siswa mendapatkan prestasi yang tinggi dalam kompetisi matematika, khususnya dalam olimpiade matematika.

OUTLINE NASKAH

ALJABAR DAN TRIGONOMETRI MENUJU OLIMPIADE MATEMATIKA

Bab 1	Soal Pendahuluan Aljabar
Bab 2	Soal Lanjutan Aljabar
Bab 3	Pembahasan Soal Pendahuluan Aljabar
Bab 4	Pembahasan Soal Lanjutan Aljabar
Bab 5	Latihan Soal Aljabar
Bab 6	Soal Pendahuluan Trigonometri
Bab 7	Soal Lanjutan Trigonometri
Bab 8	Pembahasan Soal Pendahuluan Trigonometri
Bab 9	Pembahasan Soal Lanjutan Trigonometri
Bab 10	Latihan Soal Trigonometri
Daftar Pustaka	

1 Soal Pendahuluan Aljabar

1. Misalkan $4!$ Berarti $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Carilah digit terakhir dari $1! + 2! + 3! + \dots + 1999!$.

2. Diketahui persamaan:

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 12 \\ (y-2)(z-3) = 20 \\ (z-3)(x-1) = 15 \end{cases}$$

dan $x, y, z > 0$. Carilah nilai dari $3x + 2y + 3z$.

3. Buktikan bahwa
$$\frac{\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}} = 1.$$

4. Suatu bilangan x terdiri dari dua angka. Jika bilangan itu ditambah dengan 45, maka didapat bilangan yang terdiri dari dua angka itu juga dalam urutan terbalik. Jika diantara angka puluhan dan angka satuan disisipkan angka nol, maka diperoleh bilangan yang nilainya $7\frac{2}{3}$ kali bilangan x . Carilah bilangan x tersebut!
5. Pada dasar sebuah tong terdapat 3 buah keran. Dari keadaan penuh, dengan membuka keran pertama dan kedua saja, tong tersebut dapat dikosongkan dalam waktu 70 menit; jika yang dibuka keran pertama dan ketiga saja, tong tersebut kosong dalam waktu 84 menit; jika yang dibuka keran kedua dan ketiga saja, tong itu kosong dalam waktu 140 menit. Tentukanlah waktu yang diperlukan untuk mengosongkan tong tersebut jika ketiga keran dibuka bersama!

6. Diketahui bahwa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 64$. Tentukan nilai dari

$$\sqrt{\frac{5a^2c - 4c^2e + e^3}{5b^2d - 4d^2f + f^3}}.$$

7. Akar-akar persamaan $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$ adalah α_n dan β_n . Tentukanlah

$$\text{nilai dari } \frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)} + \frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}.$$

8. Diketahui bahwa a , b , c , dan d adalah bilangan real yang memenuhi persamaan

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 6 \\ \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 8 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

9. Misalkan x dan y suatu bilangan real. Jika diketahui bahwa

$$\left[\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}} \right]^{21}$$

, tentukan pada suku ke berapa dimana x dan y mempunyai pangkat yang sama!

10. Diketahui bahwa p dan q adalah bilangan real dimana $p > 1999$ dan $q > 2000$.

Hitunglah nilai $p + q$ jika diketahui bahwa

$$1999\sqrt{(p+1999)(p-1999)} + 2000\sqrt{(p+2000)(p-2000)} = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

11. Buktikanlah bahwa

$$3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1.$$

12. Diketahui bahwa

$$a + b + c = 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 24$$

Tentukan nilai dari $a^4 + b^4 + c^4$!

13. Diketahui bahwa

$$ab = 6, bc = 7\frac{1}{2}, cd = 35, de = 4\frac{2}{3}, ea = 2\frac{2}{3}.$$

Tentukan nilai $a + b + c + d$.

14. Buktikan bahwa $p > q > 0$, jika $x = \frac{1+p+p^2+p^3+\dots+p^{n-1}}{1+p+p^2+p^3+\dots+p^{n-2}+p^{n-1}+p^n}$ dan

$$y = \frac{1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}}{1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-2}+q^{n-1}+q^n} \text{ maka } x < y.$$

15. Suatu pertunjukkan musik dihadiri oleh sejumlah penonton. Setiap penonton dewasa membayar tiket seharga Rp 40.000,-, sedangkan setiap penonton anak-anak membayar Rp 15.000,-. Jika jumlah uang penjualan tiket adalah Rp 5.000.000,- dan banyaknya penonton dewasa adalah 40% dari seluruh penonton, tentukan banyaknya penonton anak-anak.

16. Diketahui a dan b suatu bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$. Carilah nilai b yang mungkin!

17. Bimo berlari tiga kali lebih cepat dari kecepatan Kiki berjalan kaki. Misalkan Kiki, yang lebih cerdas dari Bimo menyelesaikan ujian pada pukul 2:00 dan mulai berjalan pulang. Bimo menyelesaikan ujian pada pukul 2:12 dan berlari mengejar Kiki. Tentukan pada pukul berapakah Bimo tepat akan menyusul Kiki!

18. Misalkan p dan q bilangan real yang berbeda sehingga:

$$\frac{p}{q} + \frac{p+10q}{q+10p} = 2.$$

Tentukan nilai dari $\frac{p}{q}$.

19. Misalkan

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1001^2}{2001} \text{ dan } b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{1001^2}{2003}.$$

Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat dengan $a - b$.

20. Diketahui bahwa $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$. Tentukan nilai dari $\frac{a+b}{a-b}$.

2 Soal Lanjutan Aljabar

1. Suatu pesawat terbang sejauh L mil setiap perjalanannya. Kecepatan angin pada bagian kepala pesawat 160 m jam^{-1} dan pada bagian ekor pesawat 240 m jam^{-1} . Berapakah kecepatan rata-rata pesawat dalam perjalanan tersebut?
2. Sebuah jam berhenti untuk 15 menit setiap jam. Berapa banyak waktu yang hilang selama jam menunjukkan pukul 12 siang sampai pukul 12 malam?
3. John lahir pada abad ke-18 dan berusia x tahun pada x^2 . Berapakah umurnya pada tahun 1776?
4. Diketahui bahwa simbol $|x|$ bermakna nilai x jika $x \geq 0$, dan nilai $-x$ jika $x < 0$. Tentukan $|x - y|$ dalam $\max(x, y)$ dan $\min(x, y)$ dimana $\max(x, y)$ berarti x jika $x > y$, dan y jika $x < y$, dan $\min(x, y)$ berarti x jika $x < y$, dan y jika $x > y$.
5. Diketahui bahwa $[x]$ bermakna bilangan bulat terbesar lebih kecil dari atau sama dengan x . Tentukanlah nilai $[y] + [1 - y]$.
6. Tentukan nilai positif terkecil dari n untuk $n^2 + n + 41$ adalah bukan bilangan prima!
7. Tentukan digit terakhir dari (a) $\left(\frac{5}{8}\right)^5$ dan (b) $\left(\frac{4}{7}\right)^5$!
8. Carilah nilai maksimum dari x yang mana 2^x dapat dibagi 21!
9. Tiga buah siswa dalam suatu komite, A, B, dan C, bertemu dan menyetujui bahwa A akan kembali setiap 10 hari, B setiap 12 hari, dan C setiap 15 hari. Carilah paling sedikit banyaknya hari sebelum C bertemu kembali dengan A dan B.

10. Diketahui bahwa tiga digit bilangan $N = a_1a_2a_3$, dituliskan dalam basis 10. Carilah nilai absolut m_1, m_2, m_3 dimana N dapat dibagi dengan 7 jika $m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3$ dapat dibagi dengan 7.
11. Jika $x^3 + a$ dapat dibagi dengan $x + 2$, maka sisanya adalah -15 . Carilah nilai numerik dari a !
12. Misalkan $y_1 = \frac{x+1}{x-1}$. Misal y_2 dapat diperoleh dari menyederhanakan persamaan dengan mengganti x dalam y_1 dengan $\frac{x+1}{x-1}$. Misal y_3 dapat diperoleh dari menyederhanakan persamaan dengan mengganti x dalam y_2 dengan $\frac{x+1}{x-1}$, begitu pula yang keempat. Tentukan y_6, y_{100} , dan y_{501} !
13. Bilangan B 25% lebih dari bilangan A , bilangan C 20% lebih dari bilangan B , dan bilangan D $x\%$ lebih kecil dari C . Tentukan nilai x jika bilangan D sama dengan bilangan A !
14. Arif membeli x bunga untuk y dollar, dimana x dan y suatu bilangan. Sebelum meninggalkan toko, pedagang berkata, "Jika kamu membeli 18 bunga lagi, saya akan menjual semuanya untuk enam dollar. Kamu bisa berhemat 60 sen per lusin." Tentukan nilai x dan y yang tepat dalam kondisi ini!
15. Buktikan bahwa untuk pasangan yang sama dari nilai integral x dan y , antara $3x + y$ dan $5x + 6y$ dapat dibagi dengan 13!
16. Dalam suatu segitiga, diketahui kelilingnya adalah 30 cm dan jumlah kuadrat panjang sisinya adalah 338. Tentukan panjang tiap sisinya!
17. Misal (x,y) adalah koordinat titik P dalam bidang xy dan misalkan (X,Y) adalah koordinat titik Q dalam bidang XY . Jika $X = x + y$ dan $Y = x - y$, tentukan persamaan yang sederhana untuk titik dalam bidang XY yang merupakan gambaran dari titik $x^2 + y^2 = 1$ dalam bidang xy .

18. Diketahui bahwa $x + y + 2z = k$, $x + 2y + z = k$, dan $2x + y + z = k$, $k \neq 0$.
Tentukan nilai dari $x^2 + y^2 + z^2$ dalam k !
19. Tunjukkan hubungan yang sederhana antara a , b , dan c dimana semuanya berbeda jika $a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab$.
20. Jika $f = mx + ny$, dimana m dan n adalah bilangan bulat positif, dan x, y adalah variabel konstan positif. Tentukan nilai minimum f !
21. Suatu bilangan bulat $p \geq 2$ merupakan bilangan prima yang faktornya hanya p dan 1. Misalkan M menyatakan perkalian 100 bilangan prima yang pertama. Berapa banyakkah angka 0 (nol) di akhir bilangan M ?
22. Misalkan $p = 10(9!)^{\frac{1}{2}}$, $q = 9(10!)^{\frac{1}{2}}$, dan $r = (11!)^{\frac{1}{2}}$, dimana $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Tentukan urutan yang benar dari ketiga bilangan ini!
23. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif yang memenuhi bentuk $x^8 + y^8$ kurang dari 10.000?
24. Berapa jumlah digit-digit bilangan $2^{1999} \cdot 5^{2000}$?
25. Tentukan bilangan n terkecil sehingga setiap sub-himpunan dari $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ yang beranggotakan n unsur pasti mengandung dua anggota yang selisihnya adalah 8!

3 Pembahasan Soal Pendahuluan Aljabar

1. Misalkan $4!$ Berarti $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Carilah digit terakhir dari $1! + 2! + 3! + \dots + 1999!$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa untuk $5!$, $6!$, $7!$, dan seterusnya mempunyai digit terakhir 0 dimana:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Jadi, digit terakhir dari $1! + 2! + 3! + \dots + 1999!$ adalah $1 + 2 + 6 + 4 = 13$ dimana digit terakhirnya 3.

2. Diketahui persamaan:

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 12 \\ (y-2)(z-3) = 20 \\ (z-3)(x-1) = 15 \end{cases}$$

dan $x, y, z > 0$. Carilah nilai dari $3x + 2y + 3z$.

Pembahasan:

Misalkan $a = x - 1$, $b = y - 2$, dan $c = z - 3$. Dengan demikian, persamaan tersebut menjadi

$$\begin{cases} ab = 12 \\ bc = 20 \\ ca = 15 \end{cases}$$

dimana

$$ab = 12 \rightarrow b = \frac{12}{a}.$$

Kemudian, substitusikan $b = \frac{12}{a}$ ke persamaan $bc = 20$, diperoleh

$$b = \frac{12}{a} \Leftrightarrow bc = 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{a}c = 20$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{20}{12}a = \frac{5}{3}a$$

Dengan mensubstitusikan nilai $c = \frac{5}{3}a$ ke persamaan $ca = 15$ akan diperoleh

$$c = \frac{5}{3}a \Leftrightarrow ca = 15$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 3$$

Karena $x, y, z > 0$ maka dipilih $a = 3$. Kemudian dengan mensubstitusikan $a = 3$ pada $ca = 15$ akan diperoleh

$$ca = 15$$

$$\Leftrightarrow c \cdot 3 = 15$$

$$\Leftrightarrow c = 5$$

Substitusi $c = 5$ ke persamaan $bc = 20$ akan diperoleh

$$bc = 20$$

$$\Leftrightarrow b \cdot 5 = 20$$

$$\Leftrightarrow b = 4$$

Jadi, diketahui bahwa $a = 3$, $b = 4$, dan $c = 5$, maka nilai $3x + 2y + 3z = 3.4 + 2.6 + 3.8 = 48$.

3. Buktikan bahwa
$$\frac{\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}} = 1.$$

Pembahasan:

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{x^2 - y^2}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \left(\frac{\frac{y^2 + x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2}}{\frac{x^2 - y^2}{y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1^{-\frac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa pernyataan diatas sama dengan 1.

4. Suatu bilangan x terdiri dari dua angka. Jika bilangan itu ditambah dengan 45, maka didapat bilangan yang terdiri dari dua angka itu juga dalam urutan terbalik. Jika diantara angka puluhan dan angka satuan disisipkan angka nol, maka diperoleh bilangan yang nilainya $7\frac{2}{3}$ kali bilangan x . Carilah bilangan x tersebut!

Pembahasan:

Misalkan bilangan yang dimaksud yaitu x yang dapat dinyatakan dengan $10x + y$.

- Jika bilangan itu ditambah dengan 46, maka akan didapat bilangan yang terdiri dari dua angka itu pula dalam urutan terbalik. Sehingga

$$xy + 45 = yx$$

$$\Leftrightarrow 10x + y + 45 = 10y + x$$

$$\Leftrightarrow 9x = 9y - 45$$

$$\Leftrightarrow x = y - 5 \cdots (1)$$

- Jika diantara angka puluhan dan angka satuan disisipkan angka nol, maka diperoleh bilangan yang nilainya $7\frac{2}{3}$ kali bilangan x . Sehingga

$$x0y = 7\frac{2}{3}xy$$

$$\Leftrightarrow 100x + y = \frac{23}{3}(10x + y)$$

$$\Leftrightarrow 300x + 3y = 230x + 23y$$

$$\Leftrightarrow 70x = 20y$$

$$\Leftrightarrow 7x = 2y \cdots (2)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke persamaan (2) akan diperoleh

$$7(y-5) = 2y$$

$$\Leftrightarrow 7y - 35 = 2y$$

$$\Leftrightarrow 5y = 35$$

$$\Leftrightarrow y = 7$$

Kemudian $y = 7$ disubstitusikan ke persamaan (1) akan diperoleh $x = y - 5 = 7 - 5 = 2$. Jadi, bilangan yang dimaksud adalah 27.

5. Pada dasar sebuah tong terdapat 3 buah keran. Dari keadaan penuh, dengan membuka keran pertama dan kedua saja, tong tersebut dapat dikosongkan dalam waktu 70 menit; jika yang dibuka keran pertama dan ketiga saja, tong tersebut kosong dalam waktu 84 menit; jika yang dibuka keran kedua dan ketiga saja, tong itu kosong dalam waktu 140 menit. Tentukanlah waktu yang diperlukan untuk mengosongkan tong tersebut jika ketiga keran dibuka bersama!

Pembahasan:

Misalkan banyaknya air yang mengalir pada tong adalah p .

Kecepatan air mengalir dari keran 1: v_1

Kecepatan air mengalir dari keran 2: v_2

Kecepatan air mengalir dari keran 3: v_3

Dengan demikian, maka akan diperoleh persamaan

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{p}{70} \\ v_1 + v_3 = \frac{p}{84} \\ v_2 + v_3 = \frac{p}{140} \end{cases}$$

Ketiga persamaan tersebut dijumlahkan dan diperoleh

$$v_1 + v_2 + v_1 + v_3 + v_2 + v_3 = \frac{p}{70} + \frac{p}{84} + \frac{p}{140}$$

$$\Leftrightarrow 2(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{14p}{420}$$

$$\Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = \frac{7p}{420}$$

$$\Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = \frac{p}{60}$$

Jadi, waktu yang diperlukan tong untuk kosong jika ketiga keran dibuka bersama adalah 60 menit.

6. Diketahui bahwa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 64$. Tentukan nilai dari

$$\sqrt{\left(\frac{5a^2c - 4c^2e + e^3}{5b^2d - 4d^2f + f^3} \right)}.$$

Pembahasan:

Diketahui bahwa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 64$, maka $a = 64b$, $c = 64d$, dan $e = 64f$.

Sehingga

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{5a^2c - 4c^2e + e^3}{5b^2d - 4d^2f + f^3} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5(64b)^2(64d) - 4(64d)^2(64f) + (64f)^3}{5b^2d - 4d^2f + f^3} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{64^3(5b^2d - 4d^2f + f^3)}{5b^2d - 4d^2f + f^3} \right)} = \sqrt{64^3} = 512 \end{aligned}$$

7. Akar-akar persamaan $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$ adalah α_n dan β_n . Tentukanlah

nilai dari $\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)} + \frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}.$

Pembahasan:

Diketahui persamaan kuadrat $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$ dengan akar-akar persamaannya adalah α_n dan β_n .

$$\alpha_n + \beta_n = -\frac{b}{a} = -\frac{(2n+1)}{1} = -2n-1$$

$$\alpha_n \cdot \beta_n = \frac{c}{a} = \frac{n^2}{1} = n^2$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_n + 1)(\beta_n + 1) &= \alpha_n \cdot \beta_n + (\alpha_n + \beta_n) + 1 \\
&= n^2 + (-2n - 1) + 1 \\
&= n^2 - 2n \\
&= n(n - 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\alpha_3 + 1)(\beta_3 + 1)} + \frac{1}{(\alpha_4 + 1)(\beta_4 + 1)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{20} + 1)(\beta_{20} + 1)} \\
&= \frac{1}{3(3-2)} + \frac{1}{4(4-2)} + \dots + \frac{1}{20(20-2)} \\
&= \frac{1}{3(1)} + \frac{1}{4(2)} + \dots + \frac{1}{20(18)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{531}{380} \right) = \frac{531}{760}
\end{aligned}$$

8. Diketahui bahwa a , b , c , dan d adalah bilangan real yang memenuhi persamaan

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 6 \\ \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 8 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Pembahasan:

Diketahui bahwa

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 6 \dots (1) \\ \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 8 \dots (2) \end{cases}$$

Misalkan bahwa $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = p$ dan $\frac{b}{c} + \frac{d}{a} = q$. Jadi, persamaan (1) menjadi

$$p + q = 6 \Leftrightarrow q = 6 - p \dots (3)$$

dan persamaan (2) menjadi

$$pq = 8$$

$$\Leftrightarrow p(6-p) = 8$$

$$\Leftrightarrow 6p - p^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 6p + 8 = 0$$

dimana $p = 2$ atau $p = 4$.

Jadi, nilai $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = p$ dimana p adalah 2 atau 4.

9. Misalkan x dan y suatu bilangan real. Jika diketahui bahwa

$$\left[\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}} \right]^{21}$$

, tentukan pada suku ke berapa dimana x dan y mempunyai pangkat yang sama!

Pembahasan:

Diketahui suatu polinomial $\left[\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}} \right]^{21}$.

$$\left[\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}} \right]^{21} = \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \right)^{21}$$

Misalkan x dan y mempunyai pangkat yang sama pada suku ke- $(k + 1)$, sehingga

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{6}} \right)^{21-k} \left(x^{-\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \right)^k &= x^{\frac{21-k}{3}} \cdot y^{\frac{21-k}{-6}} \cdot x^{-\frac{k}{6}} \cdot y^{\frac{k}{2}} \\ &= x^{\frac{42-3k}{6}} \cdot y^{\frac{4k-21}{6}} \end{aligned}$$

Pangkat $x =$ pangkat y , sehingga

$$\frac{42-3k}{6} = \frac{4k-21}{6}$$

$$\Leftrightarrow 42-3k = 4k-21$$

$$\Leftrightarrow 7k = 63$$

$$\Leftrightarrow k = 9$$

Jadi, $k + 1 = 9 + 1 = 10$.

10. Diketahui bahwa p dan q adalah bilangan real dimana $p > 1999$ dan $q > 2000$.

Hitunglah nilai $p + q$ jika diketahui bahwa

$$1999\sqrt{(p+1999)(p-1999)} + 2000\sqrt{(p+2000)(p-2000)} = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Pembahasan:

p dan q adalah bilangan real dimana $p > 1999$ dan $q > 2000$. Diketahui bahwa

$$1999\sqrt{(p+1999)(p-1999)} + 2000\sqrt{(p+2000)(p-2000)} = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 1999\sqrt{p^2 - 1999^2} + 2 \cdot 2000\sqrt{p^2 - 2000^2} = p^2 + q^2$$

Misalkan:

$$a^2 = p^2 - 1999^2 \rightarrow p^2 = a^2 + 1999^2$$

$$b^2 = q^2 - 2000^2 \rightarrow q^2 = b^2 + 2000^2$$

Sehingga diperoleh,

$$2 \cdot 1999a + 2 \cdot 2000b = a^2 + 1999^2 + b^2 + 2000^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2 \cdot 1999a + 1999^2 + b^2 - 2 \cdot 2000b + 2000^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1999)^2 + (b - 2000)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1999)^2 = 0 \rightarrow a = 1999$$

$$\Leftrightarrow (b - 2000)^2 = 0 \rightarrow b = 2000$$

Untuk $a = 1999$, diperoleh

$$p^2 = a^2 + 1999^2 = 1999^2 + 1999^2 = 2 \cdot 1999^2 \rightarrow p = 1999\sqrt{2}$$

Untuk $b = 2000$, diperoleh

$$q^2 = b^2 + 2000^2 = 2000^2 + 2000^2 = 2 \cdot 2000^2 \rightarrow q = 2000\sqrt{2}$$

$$\text{Jadi, } p + q = 1999\sqrt{2} + 2000\sqrt{2} = 3999\sqrt{2}.$$

11. Buktikanlah bahwa

$$3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1.$$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
& 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1 \\
& = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1 \\
& = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1 \\
& = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1 \\
& = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1 \\
& = (2^{32} - 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1 \\
& = (2^{64} - 1)(2^{64} + 1) = 2^{128} - 1 \\
& = 2^{128} - 1 = 2^{128} - 1
\end{aligned}$$

12. Diketahui bahwa

$$a + b + c = 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 24$$

Tentukan nilai dari $a^4 + b^4 + c^4$!

Pembahasan:

Diketahui sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 24 \end{cases}$$

Pada persamaan $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, diperoleh

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$$

$$\Leftrightarrow 9 = 3^2 - 2(ab + bc + ac)$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ac) = 0 \dots (1)$$

Pada persamaan $a^3 + b^3 + c^3 = 24$, diperoleh

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc$$

$$\Leftrightarrow 24 = 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 0 + 3abc$$

$$\Leftrightarrow 3abc = -3$$

$$\Leftrightarrow abc = -1 \dots (2)$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan persamaan (2), maka nilai untuk

$a^4 + b^4 + c^4$, diperoleh

$$\begin{aligned}
a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\
&\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = (9)^2 - 2[(ab + bc + ac)^2 - 2abc(a + b + c)] \\
&\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 81 - 2[(0)^2 - 2 \cdot (-1)(3)] \\
&\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 81 - 26 \\
&\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 69
\end{aligned}$$

13. Diketahui bahwa

$$ab = 6, bc = 7\frac{1}{2}, cd = 35, de = 4\frac{2}{3}, ea = 2\frac{2}{3}.$$

Tentukan nilai $a + b + c + d$.

Pembahasan:

Jika

$$ab = 6, bc = 7\frac{1}{2}, cd = 35, de = 4\frac{2}{3}, ea = 2\frac{2}{3}$$

maka:

- $ab = 6 \Leftrightarrow b = \frac{6}{a}$
- $bc = 7\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{a}c = \frac{15}{2} \Leftrightarrow c = \frac{15}{2} \cdot \frac{a}{6} \Leftrightarrow c = \frac{5}{4}a$
- $cd = 35 \Leftrightarrow \frac{5}{4}ad = 35 \Leftrightarrow d = \frac{28}{a}$
- $de = 4\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{28}{a}e = \frac{14}{3} \Leftrightarrow e = \frac{1}{6}a$
- $ea = 2\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6}aa = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4$

Untuk $a = 4$, akan diperoleh:

$$b = \frac{6}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{4}a = \frac{5}{4} \cdot 4 = 5, d = \frac{28}{a} = \frac{28}{4} = 7, e = \frac{1}{6}a = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Jadi, } a + b + c + d = 18\frac{1}{6}.$$

Untuk $a = -4$, akan diperoleh:

$$b = \frac{6}{a} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}, c = \frac{5}{4}a = \frac{5}{4} \cdot -4 = -5, d = \frac{28}{a} = \frac{28}{-4} = -7,$$

$$e = \frac{1}{6}a = \frac{1}{6}(-4) = -\frac{2}{3}. \text{ Jadi, } a + b + c + d = -18\frac{1}{6}.$$

14. Buktikan bahwa $p > q > 0$, jika $x = \frac{1+p+p^2+p^3+\dots+p^{n-1}}{1+p+p^2+p^3+\dots+p^{n-2}+p^{n-1}+p^n}$ dan

$$y = \frac{1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}}{1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-2}+q^{n-1}+q^n} \text{ maka } x < y.$$

Pembahasan:

Diketahui bahwa $a, b > 0$,

$$x = \frac{1+p+p^2+p^3+\dots+p^{n-1}}{1+p+p^2+p^3+\dots+p^{n-2}+p^{n-1}+p^n} \text{ dan}$$

$$y = \frac{1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}}{1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-2}+q^{n-1}+q^n}$$

Dalam persoalan ini akan ditunjukkan bahwa $x < y$ dengan $p > q > 0$, sehingga

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{q} \dots (i)$$

$$\frac{1}{p^2} < \frac{1}{q^2} \dots (ii)$$

$\vdots$

$$\frac{1}{p^n} < \frac{1}{q^n} \dots (iii)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (i), (ii), dan (iii) akan diperoleh

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} < \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^{n-1} + \dots + p^2 + p + 1}{p^n} < \frac{q^{n-1} + \dots + q^2 + q + 1}{q^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}}{p^n} < \frac{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}}{q^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^n}{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}} > \frac{q^n}{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^n}{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}} + 1 > \frac{q^n}{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}+p^n}{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}} > \frac{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^n}{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}}{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}+p^n} < \frac{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}}{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^n}$$

$$\Leftrightarrow x < y$$

15. Suatu pertunjukkan musik dihadiri oleh sejumlah penonton. Setiap penonton dewasa membayar tiket seharga Rp 40.000,-, sedangkan setiap penonton anak-anak membayar Rp 15.000,-. Jika jumlah uang penjualan tiket adalah Rp 5.000.000,- dan banyaknya penonton dewasa adalah 40% dari seluruh penonton, tentukan banyaknya penonton anak-anak.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa jumlah orang dewasa adalah 40% dari jumlah penonton sehingga jumlah anak-anak adalah 60% dari jumlah penonton. Perbandingan antara jumlah orang dewasa dengan anak-anak adalah 2 : 3. Misalkan jumlah penonton dewasa adalah **a** dan jumlah penonton anak-anak adalah **b** sehingga **a : b = 2 : 3**.

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}b \dots (i)$$

Setiap penonton dewasa membayar tiket seharga 40 ribu rupiah, sedangkan setiap penonton anak-anak membayar 15 ribu rupiah dan jumlah uang penjualan tiket 5 juta rupiah, sehingga

$$40.000a + 15.000b = 5.000.000$$

$$\Leftrightarrow 8a + 3b = 1.000 \dots (ii)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii) akan diperoleh

$$8a + 3b = 1.000$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \frac{2}{3}b + 3b = 1.000$$

$$\Leftrightarrow 16b + 9b = 3.000$$

$$\Leftrightarrow 25b = 3.000$$

$$\Leftrightarrow b = 120$$

Jadi, banyaknya penonton anak-anak adalah 120 orang.

16. Diketahui a dan b suatu bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$. Carilah nilai b yang mungkin!

Pembahasan:

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$, maka

$$ax^3 + bx^2 + 1 = (x^2 - x - 1)f(x)$$

$ax^3 + bx^2 + 1$ mempunyai nilai orde 0 adalah 1 sehingga nilai orde 0 pada $f(x)$ adalah -1 .

Orde tertinggi pada $ax^3 + bx^2 + 1$ adalah 3 sehingga nilai orde tertinggi pada $f(x) = 1$.

Jika $f(x) = (x - 1)$, maka $(x^2 - x - 1)(x - 1) = (x^3 - 2x^2 + 1)$. Bentuk $(x^3 - 2x^2 + 1)$ memenuhi bentuk $ax^3 + bx^2 + 1$ sehingga diketahui bahwa nilai $b = -2$.

17. Bimo berlari tiga kali lebih cepat dari kecepatan Kiki berjalan kaki. Misalkan Kiki, yang lebih cerdas dari Bimo menyelesaikan ujian pada pukul 2:00 dan mulai berjalan pulang. Bimo menyelesaikan ujian pada pukul 2:12 dan berlari mengejar Kiki. Tentukan pada pukul berapakah Bimo tepat akan menyusul Kiki!

Pembahasan:

Misalkan:

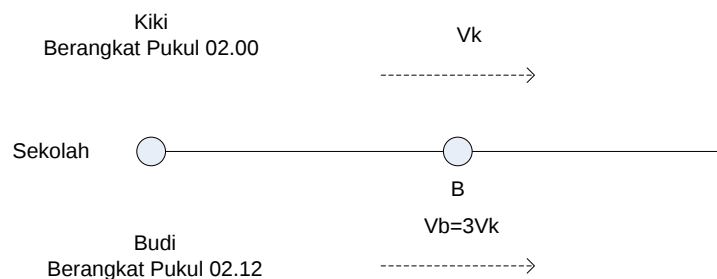
Kecepatan Kiki berjalan kaki: v_K

Kecepatan Bimo berlari: $v_B = 3v_K$

Perlu diketahui bahwa kecepatan merupakan fungsi dari jarak dan waktu

sehingga $v(\text{kecepatan}) = \frac{s(\text{jarak})}{t(\text{waktu})}$. Untuk memudahkan menjawab persoalan

ini, digunakan ilustrasi berikut ini.



Misalkan tempat Bimo menyusul Kiki adalah B.

Waktu yang diperlukan Bimo sampai ke B adalah t .

Waktu yang diperlukan Kiki sampai ke B adalah $t + 12$.

Perlu diketahui bahwa jarak Bimo dari sekolah ke B sama dengan jarak Kiki dari sekolah ke B.

$$\Leftrightarrow v_B \cdot t = v_K \cdot (t + 12)$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot v_K \cdot t = v_K \cdot (t + 12)$$

$$\Leftrightarrow 3t = t + 12$$

$$\Leftrightarrow 2t = 12$$

$$\Leftrightarrow t = 6 \text{ menit}$$

Jadi, Bimo menyusul Kiki pada pukul $2.12 + 6 \text{ menit} = \text{pukul } 2.18$.

18. Misalkan p dan q bilangan real yang berbeda sehingga:

$$\frac{p}{q} + \frac{p+10q}{q+10p} = 2.$$

Tentukan nilai dari $\frac{p}{q}$.

Pembahasan:

Diketahui bahwa $p \neq q$.

$$\frac{p}{q} + \frac{p+10q}{q+10p} = 2 \dots (i)$$

Dengan mengalikan persamaan (i) dengan $q(q + 10p)$ akan diperoleh

$$p(q+10p) + q(p+10q) = 2q(q+10p)$$

$$\Leftrightarrow pq + 10p^2 + pq + 10q^2 = 2q^2 + 20pq$$

$$\Leftrightarrow 10p^2 - 18pq + 8q^2 = 0 \dots (ii)$$

Dengan membagi persamaan (ii) dengan $2q^2$ akan diperoleh

$$5\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 9\left(\frac{p}{q}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(5\frac{p}{q} - 4\right)\left(\frac{p}{q} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{q} = 1 \text{ (tidak memenuhi karena } p \neq q \text{)}$$

Jadi, nilai $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$.

19. Misalkan

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1001^2}{2001} \text{ dan } b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{1001^2}{2003}.$$

Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat dengan $a - b$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} a - b &= \left(\frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1001^2}{2001} \right) - \left(\frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{1001^2}{2003} \right) \\ &= \frac{1^2}{1} + \underbrace{\left(\frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3} \right) + \left(\frac{3^2}{5} - \frac{2^2}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1001^2}{2001} - \frac{1000^2}{2001} \right)}_{1000 \text{ suku}} - \frac{1001^2}{2003} \\ &= 1 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1000 \text{ suku}} - \frac{1001 \times 1001}{2003} \\ &= 1001 - \frac{1001,5 \times 1001}{2003} \\ &= 1001 - \frac{1}{2} \times 1001 \\ &= 1001 - 500,5 \\ &= 500,5 \end{aligned}$$

Jadi, bilangan bulat yang paling dekat nilainya ke $a - b$ adalah 501.

20. Diketahui bahwa $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$. Tentukan nilai dari $\frac{a+b}{a-b}$.

Pembahasan:

Jika $0 < b < a$, maka $\frac{a+b}{a-b}$ bernilai positif. Diketahui bahwa $a^2 + b^2 = 6ab$, maka

$$\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2 - 2ab} = \frac{6ab + 2ab}{6ab - 2ab} = 2.$$

$$\text{Jadi, } \frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}.$$

4 Pembahasan Soal Lanjutan Aljabar

1. Suatu pesawat terbang sejauh L mil setiap perjalanannya. Kecepatan angin pada bagian kepala pesawat 160 m jam^{-1} dan pada bagian ekor pesawat 240 m jam^{-1} . Berapakah kecepatan rata-rata pesawat dalam perjalanan tersebut?

Pembahasan:

Secara jelas dapat dikatakan bahwa kecepatan rata-rata pesawat tersebut adalah $\frac{1}{2}(160 + 240) = 200 \text{ m jam}^{-1}$. Hal ini salah karena lamanya penerbangan tidaklah sama pada tiap perjalanan.

Dengan rumus dasar bahwa $R \times T = D$, dimana R adalah kecepatan rata-rata (m per jam), T adalah waktu total (jam), dan D adalah jarak total (mil). Misalkan T_1 dan T_2 adalah waktu untuk tiap perjalanan sehingga $T_1 = \frac{L}{160}$ dan $T_2 = \frac{L}{240}$.

Oleh karena itu, $T = T_1 + T_2 = \frac{L}{160} + \frac{L}{240} = L\left(\frac{1}{96}\right)$. Jika jarak total $2L$, maka $R = \frac{2L}{L\left(\frac{1}{96}\right)} = 192 \text{ m per jam}$.

2. Sebuah jam berhenti untuk 15 menit setiap jam. Berapa banyak waktu yang hilang selama jam menunjukkan pukul 12 siang sampai pukul 12 malam?

Pembahasan:

Waktu yang hilang adalah 12 ditambah banyaknya waktu yang hilang dimana $12 + 11\left(\frac{1}{4}\right) = 14\frac{3}{4}(\text{jam})$.

3. John lahir pada abad ke-18 dan berusia x tahun pada x^2 . Berapakah umurnya pada tahun 1776?

Pendahuluan:

Dalam rentang tahun 1700-1800, hanya bilangan $1764 = 42^2$ yang tepat. Kemudian, tahun kelahirannya adalah $1764 - 42 = 1722$. Jadi, dalam tahun 1776, dia berusia $1776 - 1722 = 54$ tahun.

4. Diketahui bahwa simbol $|x|$ bermakna nilai x jika $x \geq 0$, dan nilai $-x$ jika $x < 0$.

Tentukan $|x - y|$ dalam $\max(x, y)$ dan $\min(x, y)$ dimana $\max(x, y)$ berarti x jika $x > y$, dan y jika $x < y$, dan $\min(x, y)$ berarti x jika $x < y$, dan y jika $x > y$.

Pembahasan:

Jika $x > y$, $|x - y| = x - y = \max(x, y) - \min(x, y)$.

Jika $x < y$, $|x - y| = y - x = \max(x, y) - \min(x, y)$.

Jadi, $|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$ dalam setiap kasus.

5. Diketahui bahwa $[x]$ bermakna bilangan bulat terbesar lebih kecil dari atau sama dengan x . Tentukanlah nilai $[y] + [1 - y]$.

Pembahasan:

(a) Jika y suatu bilangan, maka $[y] + [1 - y] = y + 1 - y = 1$.

(b) Jika y bukan suatu bilangan, misalkan $y = a + h$ dimana $0 < h < 1$, dan a suatu bilangan. Kemudian

$$[y] + [1 - y] = [a + h] + [1 - (a + h)] = a - a = 0.$$

Perhatikan bahwa

$$[1 - (a + h)] = [-a + (1 - h)] = -a.$$

6. Tentukan nilai positif terkecil dari n untuk $n^2 + n + 41$ adalah bukan bilangan prima!

Pembahasan:

Persoalan ini mungkin terlihat sulit, tetapi persamaan $n^2 + n + 41$ secara umum menggambarkan bilangan prima untuk bilangan asli n dari 1 sampai 39. Akan tetapi, jika $n^2 + n = n(n + 1)$, maka tidak berlaku bahwa $n^2 + n + 41$ adalah prima ketika $n + 1 = 41$; nilai $n = 40$. Sehingga kita dapatkan bahwa $40(41) + 41 = 41^2$, yang dapat dibagi dengan 41.

7. Tentukan digit terakhir dari (a) $\left(\frac{5}{8}\right)^5$ dan (b) $\left(\frac{4}{7}\right)^5$

Pembahasan:

(a) $\left(\frac{5}{8}\right)^5 = (0,625)^5 = (625 \times 10^{-3})^5 = 625^5 \times 10^{-15}$. Tinjau bahwa 625^5 memiliki

digit terakhir 5. Jadi, digit terakhir dari $\left(\frac{5}{8}\right)^5$ adalah 5.

(b) $\left(\frac{4}{7}\right)^5 = (0.571428\dots)^5$; sehingga akhir bilangan desimalnya adalah 571428.

Jika $(571428)^5$, maka digit terakhirnya adalah 8.

8. Carilah nilai maksimum dari x yang mana 2^x dapat dibagi 21!

Pembahasan:

Bagilah 2 pada 21 dan secara berturut-turut dibagi sampai hasil bagi kurang dari 2. Kemudian menambahkan hasil baginya.

$21 \div 2$ memberikan $q_1 = 10$; $10 \div 2$ memberikan $q_2 = 5$; $5 \div 2$ memberikan $q_3 = 2$; $2 \div 2$ memberikan $q_4 = 1$. Jadi,

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 10 + 5 + 2 + 1 = 18.$$

9. Tiga buah siswa dalam suatu komite, A, B, dan C, bertemu dan menyetujui bahwa A akan kembali setiap 10 hari, B setiap 12 hari, dan C setiap 15 hari. Carilah paling sedikit banyaknya hari sebelum C bertemu kembali dengan A dan B.

Pembahasan:

Kita harus mencari bilangan terkecil yang dapat dibagi dengan 10, 12, dan 15. Perkalian umum terkecil 10, 12, dan 15 dinotasikan dengan M.

Jika $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, dan $15 = 3 \cdot 5$, $M = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 60$. Sehingga, A, B, dan C akan bersama kembali setelah 60 hari. Sebagai jalan lain, C akan bertemu A dan B dalam 4 (empat) kali.

10. Diketahui bahwa tiga digit bilangan $N = a_1a_2a_3$, dituliskan dalam basis 10. Carilah nilai absolut m_1, m_2, m_3 dimana N dapat dibagi dengan 7 jika $m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3$ dapat dibagi dengan 7.

Pembahasan:

$$N = a_1 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_3 = a_1(7+3)^2 + a_2(7+3) + a_3$$

$$= 7(14a_1 + a_2) + 2a_1 + 3a_2 + a_3.$$

Jika N dapat dibagi dengan 7, maka $2a_1 + 3a_2 + a_3$. Hal ini berlaku pula pada N yang dapat dibagi dengan 7 jika $2a_1 + 3a_2 + a_3$ dapat dibagi dengan 7. Jadi, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, dan $m_3 = 1$.

11. Jika $x^3 + a$ dapat dibagi dengan $x + 2$, maka sisanya adalah -15 . Carilah nilai numerik dari a !

Pembahasan:

Dengan menggunakan Teorema Sisa (*Remainder Theorem*), kita akan mendapatkan bahwa $(-2)^3 + a = -15$, $a = -7$.

12. Misalkan $y_1 = \frac{x+1}{x-1}$. Misal y_2 dapat diperoleh dari menyederhanakan persamaan dengan mengganti x dalam y_1 dengan $\frac{x+1}{x-1}$. Misal y_3 dapat diperoleh dari menyederhanakan persamaan dengan mengganti x dalam y_2 dengan $\frac{x+1}{x-1}$, begitu pula yang keempat. Tentukan y_6 , y_{100} , dan y_{501} !

Pembahasan:

Soal tersebut nampak terlihat sulit padahal tidak. Perhatikan bahwa

$$y_2 = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$$

$$y_2 = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\therefore y_3 = \frac{x+1}{x-1}, y_4 = x,$$

dan juga yang kelima. Untuk semua bilangan genap tersebut, berlaku bahwa

$$y_{2k} = x. \text{ Untuk semua bilangan ganjil, berlaku bahwa } y_{2k+1} = \frac{x+1}{x-1}. \text{ Jadi,}$$

$$y_6 = x, y_{100} = x, \text{ dan } y_{501} = \frac{x+1}{x-1}.$$

13. Bilangan B 25% lebih dari bilangan A, bilangan C 20% lebih dari bilangan B, dan bilangan D x% lebih kecil dari C. Tentukan nilai x jika bilangan D sama dengan bilangan A!

Pembahasan:

$$D = C \left(1 - \frac{x}{100} \right) = \left(1 - \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{20}{100} \right) B$$

$$= \left(1 - \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{20}{100} \right) \left(1 + \frac{25}{100} \right) A$$

Untuk D sama dengan A, $\left(1 - \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{20}{100} \right) \left(1 + \frac{25}{100} \right)$ harus sama dengan 1.

Sehingga, $\left(1 - \frac{x}{100} \right) \left(\frac{6}{5} \right) \left(\frac{5}{4} \right) = 1$, dimana $1 - \frac{x}{100} = \frac{2}{3}$, $x = 33\frac{1}{3}$.

14. Arif membeli x bunga untuk y dollar, dimana x dan y suatu bilangan. Sebelum meninggalkan toko, pedagang berkata, "Jika kamu membeli 18 bunga lagi, saya akan menjual semuanya untuk enam dollar. Kamu bisa berhemat 60 sen per lusin." Tentukan nilai x dan y yang tepat dalam kondisi ini!

Pembahasan:

$$\frac{100y}{x} - \frac{600}{x+18} = \frac{60}{12}; \quad \frac{y}{x} - \frac{6}{x+18} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{12} - \frac{6}{12+18}$$

$$\therefore x = 12, y = 3$$

15. Buktikan bahwa untuk pasangan yang sama dari nilai integral x dan y, antara $3x + y$ dan $5x + 6y$ dapat dibagi dengan 13!

Pembahasan:

Misal $k = 3x + y$, k suatu bilangan, sehingga $x = \frac{k-y}{3}$, Jika x didefinisikan sebagai bilangan, maka $\frac{k-y}{3}$ haruslah suatu bilangan. Misal $u = \frac{k-y}{3}$, sehingga $x = u$ dan $y = k - 3u$.

Dengan substitusi akan didapatkan $5x + 6y = 5u + 6k - 18u = 6k - 13u$. Kemudian, untuk membuktikan sesuatu yang dapat dibagi dengan 13, kita

misalkan bahwa $k = 13m$. Jadi, $3x + y = 3u + k - 3u = 13m$, dan $5x + 6y = 13(6m - u)$, keduanya dapat dibagi dengan 13 untuk nilai $x = u$ dan $y = 13m - 3u$ (m suatu bilangan).

Dimulai dengan pernyataan kedua yakni $5x + 6y$ dan digunakan dalam cara yang sama untuk mendapatkan $5x + 6y = 13n$ dan $3x + y = 13(-2n + v)$, keduanya dapat dibagi dengan 13 untuk $x = -13n + 6v$ dan $y = 13n - 5v$ (v suatu bilangan).

Sebagai bukti, misalkan $u = 3$, $m = 2$, kemudian $x = 3$, $y = 26 - 9 = 17$. Sehingga, $3x + y = 9 + 17 = 2 \cdot 13$, dan $5x + 6y = 15 + 102 = 9 \cdot 13$.

16. Dalam suatu segitiga, diketahui kelilingnya adalah 30 cm dan jumlah kuadrat panjang sisinya adalah 338. Tentukan panjang tiap sisinya!

Pembahasan:

Misalkan panjang sisi miring segitiga dinotasikan sebagai c dan yang lainnya sebagai a dan b . Berdasarkan teorema Pythagoras berlaku bahwa

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

sehingga dapat dituliskan sebagai

$$c^2 + a^2 + b^2 = 2c^2 = 338$$

$$\therefore c^2 = 169, c = 13, \text{ dan } a^2 + b^2 = 169.$$

Dengan menggunakan informasi diatas akan didapatkan

$$a + b + c = 30$$

$$\Leftrightarrow a + b + 13 = 30$$

$$\Leftrightarrow a + b = 17$$

$$\Leftrightarrow (17 - b)^2 + b^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 17b + 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - 12)(b - 5) = 0.$$

Sehingga, b bernilai 12 atau 5, dan berdasarkan perhitungan, a bernilai 5 atau 12. Sisi-sisi segitiga tersebut memiliki panjang masing-masing yaitu 5, 12, dan 13.

17. Misal (x,y) adalah koordinat titik P dalam bidang xy dan misalkan (X,Y) adalah koordinat titik Q dalam bidang XY . Jika $X = x + y$ dan $Y = x - y$, tentukan persamaan yang sederhana untuk titik dalam bidang XY yang merupakan gambaran dari titik $x^2 + y^2 = 1$ dalam bidang xy .

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $X = x + y$ sehingga $X^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Jika $Y = x - y$, maka $Y^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Sehingga,

$$X^2 + Y^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Jika $x^2 + y^2 = 1$, maka $2(x^2 + y^2) = 2$. Jadi, $X^2 + Y^2 = 2$.

Dalam hal geometri, gambaran yang sesuai untuk lingkaran tersebut yaitu mempunyai titik pusat di $(0,0)$ dan memiliki panjang jari-jari (radius) $\sqrt{2}$.

18. Diketahui bahwa $x + y + 2z = k$, $x + 2y + z = k$, dan $2x + y + z = k$, $k \neq 0$.

Tentukan nilai dari $x^2 + y^2 + z^2$ dalam k !

Pembahasan:

Dengan menambahkan ketiga persamaan yang diketahui akan didapatkan

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = k \\ x + 2y + z = k \\ \underline{2x + y + z = k} \\ 4(x + y + z) = 3k \end{array}$$

Sehingga, $(x + y + z) = \frac{3k}{4}$;

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = \frac{9k^2}{16}.$$

Dengan menggunakan eliminasi pada pasangan persamaan akan didapatkan $y - z = 0$, $x - y = 0$, dan $x - z = 0$. Karena $y^2 + z^2 = 2yz$, $x^2 + y^2 = 2xy$, $x^2 + z^2 = 2xz$, sehingga $2(xy + yz + xz) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$. Jadi,

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{9k^2}{16}, \text{ dan } (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3k^2}{16}.$$

19. Tunjukkan hubungan yang sederhana antara a , b , dan c dimana semuanya berbeda jika $a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab$.

Pembahasan:

Diketahui bahwa $a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab$, sehingga

$$c(a-b) = (b+a)(b-a).$$

Jika $a \neq b$, maka $c = -(b+a)$, dimana $a+b+c=0$.

20. Jika $f = mx + ny$, dimana m dan n adalah bilangan bulat positif, dan x, y adalah variabel konstan positif. Tentukan nilai minimum f !

Pembahasan:

Jika m, n, x , dan y tetap, maka $(mx)(ny) = (mn)(xy)$ adalah sama besarnya.

Kita akan menggunakan teori bahwa hasil perkalian dua angka yang sama adalah konstan, penjumlahan minimum dari keduanya adalah sama. Jadi, f minimum terjadi ketika $mx = ny$ dan ketika $\frac{x}{y} = \frac{n}{m}$.

Ilustrasi hal diatas sebagai berikut: Misal $m = 5, n = 3, xy = 60$. Jadi, $x:y = 3:5, x : \left(\frac{60}{x}\right) = 3:5$.

$$x^2 = 36, x = 6, y = 10$$

$$\therefore f(\min) = 5 \cdot 6 + 3 \cdot 10 = 60$$

21. Suatu bilangan bulat $p \geq 2$ merupakan bilangan prima yang faktornya hanya p dan 1. Misalkan M menyatakan perkalian 100 bilangan prima yang pertama. Berapa banyakkah angka 0 (nol) di akhir bilangan M ?

Pembahasan:

Perkalian bilangan prima yang menghasilkan angka 0 hanya bilangan prima 2 dan 5. Dengan demikian, banyaknya angka nol di akhir bilangan perkalian 100 bilangan prima yang pertama adalah 1.

22. Misalkan $p = 10(9!)^{\frac{1}{2}}, q = 9(10!)^{\frac{1}{2}},$ dan $r = (11!)^{\frac{1}{2}},$ dimana $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n$. Tentukan urutan yang benar dari ketiga bilangan ini!

Pembahasan:

Dalam menyelesaikan soal ini, terlebih dahulu kita ubah menjadi

$$p = 10(9!)^{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{9!} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{9!}$$

$$q = 9(10!)^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{10!} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{9!} = \sqrt{810} \cdot \sqrt{9!}$$

$$r = (11!)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{11 \cdot 10 \cdot 9!} = \sqrt{110} \cdot \sqrt{9!}$$

Jadi, urutan yang benar dari ketiga bilangan ini adalah $p < r < q$.

23. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif yang memenuhi bentuk $x^8 + y^8$ kurang dari 10.000?

Pembahasan:

Diketahui bahwa

$$x^8 + y^8 < 10.000$$

$$x^8 + y^8 < (\sqrt{10})^8$$

Banyaknya pasangan bilangan positif yang memenuhi adalah 8 pasang, yaitu:

(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), dan (3,2).

24. Berapa jumlah digit-digit bilangan $2^{1999} \cdot 5^{2000}$?

Pembahasan:

Bilangan $2^{1999} \cdot 5^{2000}$ dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} 2^{1999} \cdot 5^{2000} &= 2^{1999} \cdot 5^{1999} \cdot 5 \\ &= 10^{1999} \cdot 5 \end{aligned}$$

Banyaknya digit bilangan $2^{1999} \cdot 5^{2000}$ adalah 2000 digit.

25. Tentukan bilangan n terkecil sehingga setiap sub-himpunan dari $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ yang beranggotakan n unsur pasti mengandung dua anggota yang selisihnya adalah 8!

Pembahasan:

Terlebih dahulu kita harus mencari unsur yang paling banyak tetapi tidak mengandung selisihnya 8, yakni: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, dan 20 (12 unsur). Jadi, banyaknya anggota terkecil sehingga setiap sub-himpunan

$\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ pasti mengandung dua anggota yang selisihnya 8 yakni $12 + 1 = 13$ anggota.

5 Latihan Soal Aljabar

1. Diketahui bahwa a dan b suatu bilangan bulat yang memenuhi

$$b^2 + 3a^2b^2 = 30a^2 + 517$$

Tentukan nilai dari $3a^2b^2$.

Jawaban: 588

2. Misalkan a, b, c , dan d bilangan rasional. Diketahui persamaan

$$p^4 + ap^3 + bp^2 + cp + d = 0$$

mempunyai 4 (empat) akar real, dimana dua diantaranya adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2008}$. Tentukan nilai dari $a + b + c + d$.

Jawaban: 2006

3. Diketahui $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi persamaan

$$f(xy) + f(y - x) = f(y + x).$$

Tentukan nilai minimum dari $x + y$.

Jawaban: $2\sqrt{2}$

4. Suatu polinom $f(x)$ memenuhi persamaan

$$f(x^2) - x^3f(x) = 2(x^3 - 1)$$

untuk setiap x bilangan real. Tentukan derajat tertinggi (pangkat tertinggi x) $f(x)$.

Jawaban: 3

5. Diketahui suatu polinom real

$$P(x) = x^{2008} + a_1x^{2007} + a_2x^{2006} + \cdots + a_{2007}x + a_{2008}$$

dan

$$Q(x) = x^2 + 2x + 2008.$$

Misalkan persamaan $P(x) = 0$ mempunyai 2008 penyelesaian real dan $P(2008) \leq 1$. Tunjukkan bahwa persamaan $P(Q(x)) = 0$ mempunyai penyelesaian real.

Jawaban: Sudah jelas

6. Tentukan semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi ketiga persamaan berikut sekaligus

$$\begin{cases} x = y^3 + y - 8 \\ y = z^3 + z - 8 \\ z = x^3 + x - 8 \end{cases}$$

Jawaban: $(x, y, z) = (2, 2, 2)$

7. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$f(mn) + f(m+n) = f(m)f(n) + 1$$

untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$.

Jawaban: $f(n) = 1$ dan $f(n) = n + 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

8. Tentukan bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} 2x(1+y+y^2) = 3(1+y^4) \\ 2y(1+z+z^2) = 3(1+z^4) \\ 2z(1+x+x^2) = 3(1+x^4) \end{cases}$$

Jawaban: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

9. Diketahui a, b, c , dan d suatu bilangan real positif dengan

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 54 \text{ dan } abcd = 81.$$

Tentukan bilangan a, b, c , dan d .

Jawaban: $a = b = c = d = 3$

10. Hasil kali dua akar persamaan $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ adalah -32 .

Tentukan nilai k .

Jawaban: $k = 86$

11. Diketahui a, b bilangan real positif dan $a + b = 1$. Buktikan bahwa

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Jawaban: terbukti

12. Misalkan $S = (x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 24(x-2)^2 + 32(x-2) + 16$. Tentukan S jika dituliskan dalam sesedikit mungkin suku penjumlahan!

Jawaban: x^4

13. Buktikan bahwa untuk x, y real positif berlaku

$$\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} \geq \frac{2}{x+y+2}.$$

Jawaban: terbukti

14. Diberikan bahwa $x^2 + 5x + 6 = 20$. Tentukan nilai dari $3x^2 + 15x + 17$.

Jawaban: 59

15. Carilah nilai x kompleks yang berlaku pada persamaan $\sqrt{3}x^7 + x^4 + 2 = 0$.

Jawaban: $\frac{\sqrt{3}-i}{2}, \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$

6 Soal Pendahuluan Trigonometri

1. Misal x merupakan bilangan real dimana $\sec x - \tan x = 2$. Tentukan $\sec x + \tan x$.

2. Misal $0^\circ < \theta < 45^\circ$. Susunlah

$$\begin{aligned} t_1 &= (\tan \theta)^{\tan \theta}, & t_2 &= (\tan \theta)^{\cot \theta} \\ t_3 &= (\cot \theta)^{\tan \theta}, & t_4 &= (\cot \theta)^{\cot \theta} \end{aligned}$$

dalam orde yang menurun.

3. Hitunglah

(a) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, dan $\tan \frac{\pi}{12}$;

(b) $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}$;

(c) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$; dan

(d) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

4. Sederhanakan persamaan berikut

$$\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}.$$

5. Buktikan bahwa

$$1 - \cot 23^\circ = \frac{2}{1 - \cot 22^\circ}.$$

6. Carilah semua nilai x dalam interval $(0, \frac{\pi}{2})$ dalam

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}.$$

7. Himpunan Z memiliki nilai (x, y) dimana $x^2 + y^2 \leq 100$ dan $\sin(x+y) \geq 0$. Carilah daerah himpunan Z .

8. Dalam segitiga ABC , tunjukkanlah bahwa

$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$$

9. Misal

$$f_k(x) = \frac{1}{k} (\sin^k x + \cos^k x)$$

untuk $k = 1, 2, \dots$

Buktikan bahwa

$$f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$$

berlaku untuk semua x bilangan real.

10. Dalam segitiga ABC ,

$$3\sin A + 4\cos B = 6 \text{ dan } 4\sin B + 3\cos A = 1.$$

Carilah besar sudut C .

11. Buktikan bahwa

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$$

untuk semua $a \neq \frac{k\pi}{2}$, dimana k merupakan $\mathbf{Z}$.

12. Misal a, b, c , dan d suatu bilangan dalam interval $[0, \pi]$ dimana

$$\begin{cases} \sin a + 7 \sin b = 4(\sin c + 2 \sin d) \\ \cos a + 7 \cos b = 4(\cos c + 2 \cos d) \end{cases}$$

Buktikan bahwa $2 \cos(a-d) = 7 \cos(b-c)$.

13. Jelaskan bahwa

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$

sebagai suatu monomial.

14. Buktikan bahwa

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \tan 9^\circ.$$

15. Buktikan bahwa

$$\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geq (1 + \sqrt{2ab})^2$$

berlaku untuk semua bilangan real a, b, x dengan $a, b \geq 0$ dan $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

16. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$(a) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$$

$$(b) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

17. Misal ABC merupakan segitiga lancip. Buktikan bahwa

$$(a) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$(b) \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

18. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

Kemudian, buktikan jika x, y , dan z adalah bilangan real dengan $xy + yz + zx = 1$ dimana dalam segitiga ABC diketahui bahwa $\cot A = x$, $\cot B = y$, dan $\cot C = z$.

19. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1.$$

Kemudian, buktikan jika x, y , dan z bilangan real positif dalam

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

dimana dalam segitiga ABC berlaku $x = \sin \frac{A}{2}$, $y = \sin \frac{B}{2}$, dan $z = \sin \frac{C}{2}$.

20. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$(a) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}; \text{ dan}$$

$$(b) \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}.$$

21. Dalam segitiga ABC , tunjukkan bahwa

$$(a) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$$

$$(b) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C;$$

$$(c) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C;$$

$$(d) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$$

Kemudian, jika x, y , dan z suatu bilangan real positif dimana

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

tunjukkan bahwa terdapat segitiga ABC lancip dengan $x = \cos A$, $y = \cos B$, dan $z = \cos C$.

22. Dalam segitiga ABC , tunjukkan bahwa

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

23. Buktikan bahwa

$$\frac{\tan 3x}{\tan x} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

Untuk semua $x \neq \frac{k\pi}{6}$, dimana k terdapat dalam $\mathbf{Z}$.

24. Diketahui bahwa

$$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 45^\circ) = 2^n,$$

tentukan nilai n yang memenuhi.

25. Buktikan bahwa dalam segitiga ABC berlaku

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

26. Dalam segitiga ABC , $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ dan $\angle C = 60^\circ$. Carilah nilai sudut A dan B.

27. Misal a , b , dan c bilangan real diantara -1 dan 1 dimana $a + b + c = abc$. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

28. Taksirlah nilai

$$\cos a \cos 2a \cos 3a \dots \cos 999a,$$

$$\text{dimana } a = \frac{2\pi}{1999}.$$

29. Tentukan nilai minimum dari

$$\frac{\sec^4 \alpha}{\tan^2 \beta} + \frac{\sec^4 \beta}{\tan^2 \alpha}$$

dengan $\alpha, \beta \neq \frac{k\pi}{2}$, dimana k merupakan suatu $\mathbf{Z}$.

30. Buktikan bahwa $\cos 1^\circ$ merupakan bilangan irasional.

31. Buktikan bahwa

$$\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \geq \sec(a-b)$$

berlaku untuk $0 < a$ dan $b > \frac{\pi}{2}$.

32. Jika $\sin \alpha \cos \beta = -\frac{1}{2}$, tentukan nilai yang mungkin untuk $\cos \alpha \sin \beta$!

33. Misal a , b , dan c suatu bilangan real. Buktikan bahwa

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1).$$

34. Buktikan bahwa

$$(\sin x + a \cos x)(\sin x + b \cos x) \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

35. Buktikan bahwa

$$|\sin a_1| + |\sin a_2| + \dots + |\sin a_n| + |\cos(a_1 + a_2 + \dots + a_n)| \geq 1.$$

36. Buktikan bahwa

$$\frac{\sin^4 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^2 x = \csc^2 x.$$

37. Jika $\tan 15^\circ = p$. Buktikan bahwa

$$\frac{\tan 165^\circ - \tan 105^\circ}{1 + \tan 165^\circ \tan 105^\circ} = \frac{1-p}{2}.$$

38. Diketahui $\cos \alpha \tan \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0$ untuk $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Carilah nilai $\sec \alpha$.

39. Diketahui $\tan x = -\frac{2}{3}$. Tentukan nilai dari $\frac{5\sin x + 6\cos x}{2\cos x - 3\sin x}$.

40. Tentukan nilai dari

$$\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24}.$$

41. Jika $A + B = 225^\circ$. Tentukan nilai dari

$$\frac{\cot A}{1 + \cot A} \cdot \frac{\cot B}{1 + \cot B}.$$

42. Buktikan bahwa

$$\frac{\sin 3744^\circ}{\cos 774^\circ} \cdot \frac{\sin 1854^\circ}{\cos^2 396^\circ} = \sec 36^\circ.$$

43. Suatu segitiga ABC dengan $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Buktikan bahwa

$$\frac{1 + \cos A - \cos B + \cos C}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} = \tan \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C.$$

44. Jika $\cos A = \frac{3}{4}$. Tentukan $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2}$.

45. Diketahui bahwa

$$\begin{cases} a = \sin [\sin (3x - 2y) \sin 2(x - y)] \\ b = \cos [\cos (3x - 2y) \cos 2(x - y)] \end{cases}.$$

Tentukan nilai $\cos (\cos x)$ jika dinyatakan dengan a dan b .

7 Soal Lanjutan Trigonometri

1. Tentukan bilangan positif n terkecil yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \dots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin n^\circ}.$$

2. Misal x, y, z suatu bilangan riil positif. Buktikan bahwa

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

bila $x + y + z = xyz$.

3. Misal x, y, z suatu bilangan riil dengan $x \geq y \geq z \geq \frac{\pi}{12}$ dimana $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Carilah nilai minimum dari $\cos x \sin y \cos z$.

4. Misal ABC suatu segitiga lancip dengan sisi-sisi a, b, c , dan wilayah K . Buktikan bahwa

$$\sqrt{a^2b^2 - 4K^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4K^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4K^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

5. Hitunglah penjumlahan antara

$$\binom{n}{1} \sin a + \binom{n}{2} \sin 2a + \dots + \binom{n}{n} \sin na$$

dan

$$\binom{n}{1} \cos a + \binom{n}{2} \cos 2a + \dots + \binom{n}{n} \cos na$$

6. Carilah nilai minimum dari

$$|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

untuk setiap bilangan riil x .

7. Misal a, b , dan c suatu bilangan riil dimana

$$\sin a + \sin b + \sin c \geq \frac{3}{2}$$

Buktikan bahwa

$$\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$$

8. Misal a dan b bilangan riil dalam interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Buktikan bahwa

$$\sin^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 b + \cos^6 b = 1$$

jika dan hanya jika $a = b$.

9. Sudut-sudut dalam segitiga ABC kurang dari 120° . Buktikan bahwa

$$\frac{\cos A + \cos B - \cos C}{\sin A + \sin B - \sin C} > -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

10. Buktikan bahwa rerata dari

$$2\sin 2^\circ, 4\sin 4^\circ, 6\sin 6^\circ, \dots, 180\sin 180^\circ$$

adalah $\cot 1^\circ$.

11. Misalkan $\{a_n\}$ suatu bagian dari bilangan riil yang didefinisikan dengan $a_1 = t$ dan $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ untuk $n \geq 1$. Untuk berapa banyak nilai t yang diketahui jika $a_{1998} = 0$?

12. Segitiga ABC diketahui mempunyai hal berikut ini: didalamnya terdapat titik P dengan $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, dan $\angle PAC = 40^\circ$. Buktikan bahwa segitiga ABC samasisi.

13. Misalkan $a_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ dan $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 5}{2(a_n + 2)}$ untuk bilangan $n > 0$. Buktikan

bahwa

$$a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$$

untuk semua nilai n .

14. Misal n suatu bilangan dengan $n \geq 2$. Buktikan bahwa

$$\prod_{k=1}^n \tan \left[\frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{3^k}{3^n - 1} \right) \right] = \prod_{k=1}^n \cot \left[\frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{3^k}{3^n - 1} \right) \right].$$

8 Pembahasan Soal Pendahuluan Trigonometri

1. Misal x merupakan bilangan real dimana $\sec x - \tan x = 2$. Tentukan $\sec x + \tan x$.

Pembahasan: Perhatikan bahwa

$$1 = \sec^2 x - \tan^2 x = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$$

$$\Leftrightarrow (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sec x + \tan x) = \frac{1}{(\sec x - \tan x)}$$

$$\Leftrightarrow (\sec x + \tan x) = \frac{1}{2}$$

2. Misal $0^\circ < \theta < 45^\circ$. Susunlah

$$t_1 = (\tan \theta)^{\tan \theta}, \quad t_2 = (\tan \theta)^{\cot \theta}$$

$$t_3 = (\cot \theta)^{\tan \theta}, \quad t_4 = (\cot \theta)^{\cot \theta}$$

dalam orde yang menurun.

Pembahasan: Misalkan persamaan diatas adalah $y = a^x$, maka untuk $a > 1$ merupakan fungsi meningkat sebagai berikut

$$0^\circ < \theta < 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \cot \theta > 1 > \tan \theta > 0.$$

$$\Leftrightarrow t_3 < t_4$$

Untuk $a < 1$, fungsi $y = a^x$ adalah fungsi menurun sebagai berikut

$$t_1 > t_2$$

$$\Leftrightarrow \cot \theta > 1 > \tan \theta > 0$$

$$\Leftrightarrow t_1 < 1 < t_3$$

$$\Leftrightarrow t_4 > t_3 > t_1 > t_2$$

3. Hitunglah

(a) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, dan $\tan \frac{\pi}{12}$;

(b) $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}$;

(c) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$; dan

(d) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{\pi}{24} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24} \right) \\ &= 1 \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

(c) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \cos 72^\circ &= \frac{2(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} \\ &= \frac{2(\cos^2 36^\circ - \cos^2 72^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus sudut ganda, persamaan menjadi

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \cos 72^\circ &= \frac{\cos 72^\circ + 1 - \cos 144^\circ - 1}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} \\ &= \frac{\cos 72^\circ + \cos 36^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d) Penggunaan rumus sudut ganda memberikan

$$\begin{aligned} 8\sin 20^\circ \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= 8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2\sin 80^\circ \cos 80^\circ \\ &= \sin 160^\circ = \sin 20^\circ \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}.$$

4. Sederhanakan persamaan berikut

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

Pembahasan: Persamaan diatas dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} - \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{(2 - \sin^2 x)^2} - \sqrt{(2 - \cos^2 x)^2} \\
& \Leftrightarrow (2 - \sin^2 x) - (2 - \cos^2 x) \\
& \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
& \Leftrightarrow \cos 2x
\end{aligned}$$

5. Buktikan bahwa

$$1 - \cot 23^\circ = \frac{2}{1 - \cot 22^\circ}.$$

Pembahasan: Diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
1 - \cot 23^\circ &= \frac{2}{1 - \cot 22^\circ} \\
&\Leftrightarrow (1 - \cot 23^\circ)(1 - \cot 22^\circ) = 2.
\end{aligned}$$

Pembuktian menggunakan rumus penjumlahan dan pengurangan sudut merupakan cara yang tepat dalam kasus ini dimana

$$\begin{aligned}
(1 - \cot 23^\circ)(1 - \cot 22^\circ) &= \left(1 - \frac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 22^\circ}{\sin 22^\circ}\right) \\
&= \left(\frac{\sin 23^\circ - \cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}\right) \left(\frac{\sin 22^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 22^\circ}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2} \sin(23^\circ - 45^\circ) \sqrt{2} \sin(22^\circ - 45^\circ)}{\sin 23^\circ \cdot \sin 22^\circ} \\
&= \frac{2 \sin(-22^\circ) \sin(-23^\circ)}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} \\
&= \frac{2 \sin(22^\circ) \sin(23^\circ)}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} = 2
\end{aligned}$$

6. Carilah semua nilai x dalam interval $(0, \frac{\pi}{2})$ dalam

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}.$$

Pembahasan: Dari pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ dan } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} &= 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\sin x} + \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\cos x} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\cos x} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12} \cos x + \cos \frac{\pi}{12} \sin x &= 2 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{12} + x \right) &= \sin 2x \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{12} + x \right) &= 2x \vee \left(\frac{\pi}{12} + x \right) = \pi - 2x \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} \vee x &= \frac{11\pi}{36} \end{aligned}$$

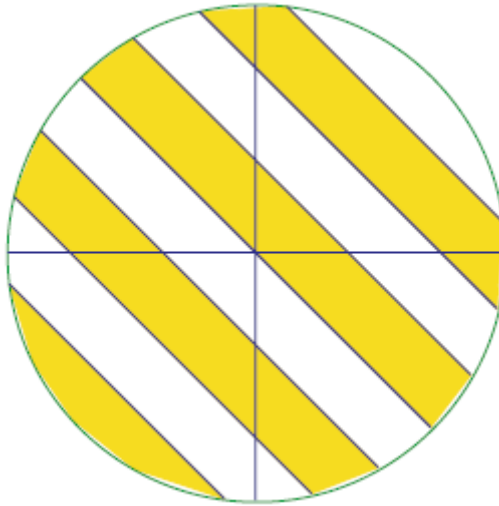
Kedua nilai x dapat digunakan dalam persamaan diatas.

7. Himpunan Z memiliki nilai (x, y) dimana $x^2 + y^2 \leq 100$ dan $\sin(x+y) \geq 0$. Carilah daerah himpunan Z .

Pembahasan: Misal C menotasikan lingkaran (x, y) dengan $x^2 + y^2 \leq 100$ dimana

$$\sin(x+y) = 0 \Leftrightarrow x+y = k\pi; k \in \text{bilangan bulat.}$$

Lingkaran C dipotong oleh garis $x+y = k\pi$ dan didalamnya terdapat nilai (x, y) dimana salah satunya memberikan harga $\sin(x+y) > 0$ atau $\sin(x+y) < 0$. Karena $\sin(-x-y) = -\sin(x+y)$, nilai (x, y) terdapat dalam wilayah dengan $\sin(x+y) > 0$ simetris dengan $\sin(x+y) < 0$.



Gambar. Area Wilayah Z

8. Dalam segitiga ABC , tunjukkanlah bahwa

$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$$

Pembahasan: Berdasarkan hukum Sinus, diketahui bahwa

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C}.$$

Penggunaan rumus sudut ganda dan penjumlahan sudut digunakan pada hubungan berikut

$$\frac{a}{b+c} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} \geq \sin \frac{A}{2},$$

dengan catatan bahwa $0 < \cos \frac{B-C}{2} \leq 1$ karena $0^\circ < |B-C| < 180^\circ$.

9. Misal

$$f_k(x) = \frac{1}{k} (\sin^k x + \cos^k x)$$

untuk $k = 1, 2, \dots$

Buktikan bahwa

$$f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$$

berlaku untuk semua x bilangan real.

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
 f_4(x) - f_6(x) &= \frac{1}{12} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{1}{6}(\sin^6 x + \cos^6 x) &= \frac{1}{12} \\
 \Leftrightarrow 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) &= 1 \\
 \Leftrightarrow 3\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right] - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) &= 1 \\
 \Leftrightarrow 3 - 6\sin^2 x \cos^2 x - 2\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x\right] &= 1 \\
 \Leftrightarrow 3 - 2 &= 1
 \end{aligned}$$

10. Dalam segitiga ABC ,

$$3\sin A + 4\cos B = 6 \text{ dan } 4\sin B + 3\cos A = 1.$$

Carilah besar sudut C .

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
 3\sin A + 4\cos B &= 6 \\
 \Leftrightarrow (3\sin A + 4\cos B)^2 &= 6^2 \\
 \Leftrightarrow 9\sin^2 A + 16\cos^2 B + 24\sin A \cos B &= 36 \dots (1) \\
 4\sin B + 3\cos A &= 1 \\
 \Leftrightarrow (4\sin B + 3\cos A)^2 &= 1^2 \\
 \Leftrightarrow 16\sin^2 B + 9\cos^2 A + 24\sin B \cos A &= 1 \dots (2)
 \end{aligned}$$

Penjumlahan persamaan (1) dan (2) memberikan

$$\begin{aligned}
 9(\sin^2 A + \cos^2 A) + 16(\sin^2 B + \cos^2 B) + 24(\sin A \cos B + \sin B \cos A) &= 37 \\
 \Leftrightarrow 24(\sin A \cos B + \sin B \cos A) &= 12 \\
 \Leftrightarrow (\sin A \cos B + \sin B \cos A) &= \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow \sin(A + B) &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Karena $C = 180^\circ - A - B$, didapatkan harga $\sin C = \sin(A + B) = \frac{1}{2}$. Sudut C yang sesuai 30° atau 150° . Tetapi, jika $C = 150^\circ$, $A < 30^\circ$, maka

$3\sin A + 4\cos B < \frac{3}{2} + 4 < 6$, hal ini berlawanan. Jawaban yang tepat yaitu $C = 30^\circ$.

11. Buktikan bahwa

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$$

untuk semua $a \neq \frac{k\pi}{2}$, dimana k merupakan $\mathbf{Z}$.

Pembahasan: Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk lain yakni

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$$

$$\Leftrightarrow \tan 3a (1 - \tan 2a \tan a) = \tan 2a + \tan a$$

$$\Leftrightarrow \tan 3a = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a \tan a}$$

$$\Leftrightarrow \tan 3a = \tan (2a + a)$$

12. Misal a, b, c , dan d suatu bilangan dalam interval $[0, \pi]$ dimana

$$\begin{cases} \sin a + 7 \sin b = 4(\sin c + 2 \sin d) \\ \cos a + 7 \cos b = 4(\cos c + 2 \cos d) \end{cases}.$$

Buktikan bahwa $2 \cos(a - d) = 7 \cos(b - c)$.

Pembahasan: Kedua persamaan diatas dituliskan sebagai

$$\sin a - 8 \sin d = 4 \sin c - 7 \sin b,$$

$$\cos a - 8 \cos d = 4 \cos c - 7 \cos b.$$

Dengan mengkuadratkan kedua persamaan tersebut dan menjumlahkan keduanya, didapat

$$1 + 64 - 16(\cos a \cos d + \sin a \sin d) = 16 + 49 - 56(\cos b \cos c + \sin b \sin c)$$

$$\Leftrightarrow 65 - 16(\cos a \cos d + \sin a \sin d) = 65 - 56(\cos b \cos c + \sin b \sin c)$$

$$\Leftrightarrow 16(\cos a \cos d + \sin a \sin d) = 56(\cos b \cos c + \sin b \sin c)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(a - d) = 7 \cos(b - c)$$

13. Jelaskan bahwa

$$\sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x)$$

sebagai suatu monomial.

Pembahasan: Dengan menggunakan rumus penjumlah sudut, kita mempunyai

$$\sin(x - y) + \sin(y - z) = 2 \sin \frac{x - z}{2} \cos \frac{x + z - 2y}{2}.$$

Dengan menggunakan rumus sudut ganda, kita dapatkan

$$\sin(z-x) = 2 \sin \frac{z-x}{2} \cos \frac{z-x}{2}.$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} & \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x) \\ &= 2 \sin \frac{x-z}{2} \left[\cos \frac{x+z-2y}{2} - \cos \frac{z-x}{2} \right] \\ &= -4 \sin \frac{x-z}{2} \sin \frac{z-y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ &= -4 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{y-z}{2} \sin \frac{z-x}{2} \end{aligned}$$

14. Buktikan bahwa

$$(4 \cos^2 9^\circ - 3)(4 \cos^2 27^\circ - 3) = \tan 9^\circ.$$

Pembahasan: Diketahui bahwa

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \Rightarrow 4 \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

untuk semua nilai $x \neq (2k+1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Jadi,

$$\begin{aligned} (4 \cos^2 9^\circ - 3)(4 \cos^2 27^\circ - 3) &= \frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ} \cdot \frac{\cos 81^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\cos 81^\circ}{\cos 9^\circ} \\ &= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} = \tan 9^\circ \end{aligned}$$

15. Buktikan bahwa

$$\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geq (1 + \sqrt{2ab})^2$$

berlaku untuk semua bilangan real a, b, x dengan $a, b \geq 0$ dan $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Pembahasan: Pertidaksamaan diatas dapat dijabarkan menjadi

$$\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geq (1 + \sqrt{2ab})^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} + \frac{ab}{\sin x \cos x}\right) \geq (1 + 2ab + 2\sqrt{2ab})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

Dengan menggunakan rumus sudut ganda, kita tahu bahwa $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$ dimana

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x \cos x}} \geq 2\sqrt{2ab} \Leftrightarrow \frac{ab}{\sin x \cos x} \geq 2ab.$$

Kombinasi antara tiga pertidaksamaan sebelumnya akan memberikan hasil yang diinginkan.

16. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$(a) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$$

$$(b) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Pembahasan:

(a) Dengan menggunakan rumus pengurangan dan penjumlahan, kita mendapatkan

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} = \tan \frac{A+B}{2} \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}\right)$$

dengan $A + B + C = 180^\circ$, $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$, dan $\tan \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2}$. Jadi,

$$\begin{aligned} & \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \cot \frac{C}{2} \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}\right), \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1 \end{aligned}$$

terbukti.

(b) Dengan menggunakan pertidaksamaan aritmatika-geometri, kita mendapatkan

$$1 = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}\right)^2},$$

dimana

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

17. Misal ABC merupakan segitiga lancip. Buktikan bahwa

(a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(b) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$

Pembahasan:

(a) Perlu diperhatikan bahwa karena $A, B,$ dan $C \neq 90^\circ$, semua pernyataan matematis dapat ditentukan. Persoalan ini sejenis dengan bagian (a) soal 16. Dengan menggunakan pertidaksamaan aritmatik-geometri didapatkan,

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

(b) Dari jawaban (a), kita mendapatkan

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

dari persamaan (b).

Catatan: Perhatian! Persamaan (a) berlaku untuk semua sudut $A, B,$ dan C dengan $A + B + C = m\pi$ dan $A, B,$ dan $C \neq \frac{k\pi}{2}$, dimana k dan m terdapat dalam $\mathbf{Z}$.

18. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

Kemudian, buktikan jika $x, y,$ dan z adalah bilangan real dengan $xy + yz + zx = 1$ dimana dalam segitiga ABC diketahui bahwa $\cot A = x, \cot B = y,$ dan $\cot C = z$.

Pembahasan: Jika ABC suatu segitiga beraturan, maka secara umum, asumsikan bahwa $A = 90^\circ$. Lalu $\cot A = 0$ dan $B + C = 90^\circ$, sehingga $\cot B \cot C = 1$. Hal ini menggambarkan hasil yang akan didapatkan nantinya.

Jika $A, B, C \neq 90^\circ$, dimana $\tan A \tan B \tan C$ dapat ditentukan, maka

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}.$$

Kemungkinan ini dapat dianggap benar karena $\cot x$ merupakan fungsi bijektif dari interval $(0^\circ, 180^\circ)$ menuju $(-\infty, \infty)$.

19. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1.$$

Kemudian, buktikan jika x , y , dan z bilangan real positif dalam

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

dimana dalam segitiga ABC berlaku $x = \sin \frac{A}{2}$, $y = \sin \frac{B}{2}$, dan $z = \sin \frac{C}{2}$.

Pembahasan: Penyelesaian persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ secara kuadratik dalam x menghasilkan

$$x = \frac{-2yz + \sqrt{4y^2z^2 - 4(y^2 + z^2 - 1)}}{2} = -yz + \sqrt{(1 - y^2)(1 - z^2)}.$$

Kemudian, dengan melakukan substitusi trigonometri dengan $y = \sin u$ dan $z = \sin v$, dimana $0^\circ < u, v < 90^\circ$ akan menghasilkan

$$x = -\sin u \sin v + \cos u \cos v = \cos(u + v).$$

Misalkan $u = \frac{B}{2}$, $v = \frac{C}{2}$, dan $A = 180^\circ - B - C$. Diketahui bahwa

$$1 \geq y^2 + z^2 = \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \text{ dan } \cos^2 \frac{B}{2} \geq \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Selanjutnya didapatkan bahwa $0^\circ < \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < 90^\circ$, dan $\cos \frac{B}{2} > \sin \frac{C}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)$

sehingga

$$\frac{B}{2} < 90^\circ - \frac{C}{2} \text{ atau } B + C < 180^\circ.$$

Kemudian,

$$x = \cos(u + v) = \sin \frac{A}{2}$$

$$y = \sin \frac{B}{2}$$

$$z = \sin \frac{C}{2}$$

dengan A , B , dan C merupakan sudut segitiga tersebut. Jika ABC suatu segitiga, seluruh langkah diatas akan memberikan hasil yang diinginkan.

20. Misal ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$(a) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}; \text{ dan}$$

$$(b) \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}.$$

Pembahasan:

(a) Dari soal no. 8, kita mendapatkan

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+d)}.$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan aritmatik-geometri didapatkan

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ac}) = 8abc.$$

Kombinasi antara dua persamaan tersebut akan dapat membuktikan persamaan diatas.

(b) Pemecahan masalah dapat dilakukan mengikuti cara (a) dan jawaban soal no. 19.

21. Dalam segitiga ABC , tunjukkan bahwa

$$(a) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$$

$$(b) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C;$$

$$(c) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C;$$

$$(d) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$$

Kemudian, jika x, y , dan z suatu bilangan real positif dimana

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

tunjukkan bahwa terdapat segitiga ABC lancip dengan $x = \cos A$, $y = \cos B$, dan $z = \cos C$.

Pembahasan: Bagian (c) dan (d) dapat diselesaikan dengan melihat jawaban soal

(b) karena $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x - 1$. Kami hanya menyelesaikan soal (a) dan (b).

(a) Dengan menggunakan rumus penjumlahan sinus dan mengetahui bahwa $A + B + C = 180^\circ$, kita mendapatakan

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin 2C$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin C \cos(A+B) + 2 \sin C \cos C \\
&= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\
&= 2 \sin C \cdot [-2 \sin A \sin(-B)] \\
&= 4 \sin A \sin B \sin C
\end{aligned}$$

(b) Dengan menggunakan rumus penjumlahan cosinus, kita mendapatkan $\cos 2A + \cos 2B = 2 \cos(A+B) \cos(A-B) = -2 \cos C \cos(A-B)$ karena $A + B + C = 180^\circ$. Perhatikan bahwa $\cos 2C + 1 = 2 \cos^2 C$ sehingga

$$-2 \cos C (\cos(A-B) - \cos C) = -4 \cos A \cos B \cos C,$$

atau

$$\cos C (\cos(A-B) + \cos(A+B)) = 2 \cos A \cos B \cos C$$

dimana persamaan tersebut didapatkan dengan dasar $\cos(A-B) + \cos(A+B) = 2 \cos A \cos B$.

Dari persamaan yang diberikan, kita mendapatkan $1 \geq x^2$, $1 \geq y^2$, dan memisalkan $x = \cos A$, $y = \cos B$ dimana $0^\circ \leq A, B \leq 90^\circ$. Karena $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ merupakan fungsi z yang selalu naik, akan didapatkan nilai c positif dari persamaan tersebut. Dari persamaan tersebut, diketahui bahwa $z = \cos C$, dimana $C = 180^\circ - A - B$. Karena $\cos^2 A + \cos^2 B = x^2 + y^2 \leq 1$, akan diketahui bahwa $\cos^2 B \leq \sin^2 A$. Karena $0^\circ < A, B \leq 90^\circ$, harga $\cos B \leq \sin A = \cos(90^\circ - A)$ yang menandakan bahwa $A + B \geq 90^\circ$. Jadi, $C \leq 90^\circ$ dan $\cos C \geq 0$.

Catatan: Penyelesaian soal (d) dapat menggunakan cara yang tidak biasa. Pertama, sistem persamaan pada soal tersebut diubah menjadi

$$\begin{aligned}
-x + (\cos B)y + (\cos C)z &= 0 \\
(\cos B)x - y + (\cos A)z &= 0 \\
(\cos C)x + (\cos A)y - z &= 0
\end{aligned}$$

Misalkan $(x, y, z) = (\sin A, \sin B, \sin C)$ sehingga determinan dari sistem adalah 0; dengan

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & \cos B & \cos C \\ \cos B & -1 & \cos A \\ \cos C & \cos A & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

22. Dalam segitiga ABC , tunjukkan bahwa

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Pembahasan: Dengan menggunakan rumus penjumlahan trigonometri dan rumus sudut ganda, kami dapatkan bahwa

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

dan

$$1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2}.$$

Dari persamaan tersebut didapatkan

$$2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

atau

$$\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Dengan menjumlahkan persamaan diatas, hasil akan dapat diketahui.

23. Buktikan bahwa

$$\frac{\tan 3x}{\tan x} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

Untuk semua $x \neq \frac{k\pi}{6}$, dimana k terdapat dalam $\mathbf{Z}$.

Pembahasan: Dari rumus sudut tripel, didapatkan

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\begin{aligned}
&= \tan x \cdot \frac{(\sqrt{3} - \tan x)(\sqrt{3} + \tan x)}{(1 - \sqrt{3} \tan x)(1 + \sqrt{3} \tan x)} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3} \tan x} \cdot \tan x \cdot \frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 - \sqrt{3} \tan x} \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)
\end{aligned}$$

Berlaku untuk semua nilai $x \neq \frac{k\pi}{6}$, dimana k merupakan $\mathbf{Z}$.

24. Diketahui bahwa

$$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 45^\circ) = 2^n,$$

tentukan nilai n yang memenuhi.

Pembahasan: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
1 + \tan k^\circ &= 1 + \frac{\sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\cos k^\circ + \sin k^\circ}{\cos k^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{2} \sin(45 + k)^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos(45 - k)^\circ}{\cos k^\circ}
\end{aligned}$$

Sehingga

$$(1 + \tan k^\circ)(1 + \tan(45 - k)^\circ) = \frac{\sqrt{2} \cos(45 - k)^\circ}{\cos k^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2} \cos(k)^\circ}{\cos(45 - k)^\circ} = 2.$$

Hasil tersebut digunakan untuk menentukan nilai n sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 45^\circ) \\
&= (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 43^\circ) \dots (1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ)(1 + \tan 45^\circ) \\
&= 2^{23} \\
&\text{, nilai } n = 23.
\end{aligned}$$

25. Buktikan bahwa dalam segitiga ABC berlaku

$$\frac{a - b}{a + b} = \tan \frac{A - B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Pembahasan: Dari hukum sinus dan rumus penjumlahan sudut akan didapatkan

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2}}{2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}}$$

$$= \tan \frac{A-B}{2} \cot \frac{A+B}{2} = \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

26. Dalam segitiga ABC , $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ dan $\angle C = 60^\circ$. Carilah nilai sudut A dan B .

Pembahasan: Dari persoalan sebelumnya kita ketahui bahwa

$$\frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Sehingga

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3} = \tan \frac{A-B}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

dengan $\tan \frac{A-B}{2} = 1$. Diketahui bahwa $A - B = 90^\circ$ dan $A + B = 180^\circ - C = 120^\circ$

sehingga $A = 105^\circ$ dan $B = 15^\circ$.

27. Misal a , b , dan c bilangan real diantara -1 dan 1 dimana $a + b + c = abc$. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

Pembahasan: Misalkan $a = \tan x$, $b = \tan y$, $c = \tan z$ dimana $x, y, z \neq \frac{k\pi}{4}$, untuk

semua bilangan k . Pada keadaan $a + b + c = abc$ berarti bahwa $\tan(x + y + z) = 0$.

Dari penggunaan rumus sudut rangkap didapatkan

$$\tan(2x + 2y + 2z) = \frac{2 \tan(x + y + z)}{1 - \tan^2(x + y + z)} = 0.$$

Jadi,

$$\tan 2x + \tan 2y + \tan 2z = \tan 2x \tan 2y \tan 2z,$$

hal ini mirip dengan no. 17 (a) yang disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{2 \tan y}{1 - \tan^2 y} + \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z} \\ &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{2 \tan y}{1 - \tan^2 y} \cdot \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z}. \end{aligned}$$

Jawaban dapat ditentukan dengan mensubstitusikannya.

28. Taksirlah nilai

$$\cos a \cos 2a \cos 3a \dots \cos 999a ,$$

$$\text{dimana } a = \frac{2\pi}{1999} .$$

Pembahasan: Misalkan P menyatakan hasil yang akan dicari dan $Q = \sin a \sin 2a \sin 3a \dots \sin 999a$. Kemudian,

$$\begin{aligned} 2^{999} PQ &= (2 \sin a \cos a)(2 \sin 2a \cos 2a) \dots (2 \sin 999a \cos 999a) \\ &= \sin 2a \sin 4a \dots \sin 1998a \\ &= (\sin 2a \sin 4a \dots \sin 998a) [-\sin(2\pi - 1000a)] \cdot [-\sin(2\pi - 1002a)] \dots [-\sin(2\pi - 1998a)] \\ &= \sin 2a \sin 4a \dots \sin 998a \sin 999a \sin 997a \dots \sin a = Q . \end{aligned}$$

$$\text{Akan terlihat mudah jika } Q \neq 0 \text{ sehingga nilai } P = \frac{1}{2^{999}} .$$

29. Tentukan nilai minimum dari

$$\frac{\sec^4 \alpha}{\tan^2 \beta} + \frac{\sec^4 \beta}{\tan^2 \alpha}$$

$$\text{dengan } \alpha, \beta \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ dimana } k \text{ merupakan suatu } \mathbf{Z} .$$

Pembahasan: Anggap $a = \tan^2 \alpha$ dan $b = \tan^2 \beta$ sehingga persamaan diatas dapat ditulis menjadi

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} ,$$

dengan $a, b \geq 0$. Dari persamaan tersebut dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} &= \frac{a^2 + 2a + 1}{b} + \frac{b^2 + 2b + 1}{a} \\ &= \left(\frac{a^2}{b} + \frac{1}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{1}{a} \right) + 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \\ &\geq 4 \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}} + 4 \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 8 . \end{aligned}$$

Persamaan tersebut berlaku ketika $a = b = 1$; $\alpha = \pm 45^\circ + k \cdot 180^\circ$ dan $\beta = \pm 45^\circ + k \cdot 180^\circ$ untuk bilangan k .

30. Buktikan bahwa $\cos 1^\circ$ merupakan bilangan irasional.

Pembahasan: Anggap suatu kontradiksi bahwa $\cos 1^\circ$ rasional sehingga $\cos 2^\circ = 2\cos 1^\circ - 1$. Dengan menggunakan identitas trigonometri

$$\cos(n^\circ + 1^\circ) + \cos(n^\circ - 1^\circ) = 2\cos n^\circ \cos 1^\circ,$$

kita menganggap bahwa $\cos n^\circ$ rasional untuk semua bilangan $n \geq 1$. Tetapi hal ini jelaslah salah, karena sebagai contoh, $\cos 30^\circ$ bukan rasional maka inilah kontradiksi.

31. Buktikan bahwa

$$\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \geq \sec(a - b)$$

berlaku untuk $0 < a$ dan $b > \frac{\pi}{2}$.

Pembahasan: Dengan mengalikan dua sisi pertidaksamaan dengan $\sin a \sin b + \cos a \cos b = \cos(a - b)$ akan didapatkan bentuk

$$\left(\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \right) (\sin a \sin b + \cos a \cos b) \geq 1.$$

Tetapi hal ini mengikuti pertidaksamaan Cauchy-Schwarz karena berdasarkan pertidaksamaan ini, sisi kiri lebih besar atau sama dengan $(\sin^2 a + \cos^2 a)^2 = 1$.

32. Jika $\sin \alpha \cos \beta = -\frac{1}{2}$, tentukan nilai yang mungkin untuk $\cos \alpha \sin \beta$!

Pembahasan: Perhatikan bahwa

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} + \cos \alpha \sin \beta.$$

Karena $-1 < \sin(\alpha + \beta) \leq 1$, mengakibatkan $-\frac{1}{2} \leq \cos \alpha \sin \beta < \frac{3}{2}$. Karena

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$, dapat disimpulkan bahwa

$$-\frac{3}{2} \leq \cos \alpha \sin \beta < \frac{1}{2}.$$

Dengan mengkombinasikan dua buah hasil tersebut akan didapatkan

$$-\frac{1}{2} \leq \cos \alpha \sin \beta < \frac{1}{2}.$$

Tetapi, kita belum menentukan hasil yang dimaksud karena $\cos \alpha \sin \beta$ dapat bernilai pada interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Untuk menentukan, kita gunakan

$$\begin{aligned} (\cos \alpha \sin \beta)^2 &= (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) \\ &= 1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta) + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \\ &= \frac{5}{4} - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta) \\ &= \frac{5}{4} - (\sin \alpha + \cos \beta)^2 + 2 \sin \alpha \cos \beta \\ &= \frac{1}{4} - (\sin \alpha + \cos \beta)^2. \end{aligned}$$

Misalkan $x = \sin \alpha$ dan $y = \cos \beta$, kemudian $-1 \leq x, y, \leq 1$ dan $xy = -\frac{1}{2}$. Wilayah

hasil (*range*) penjumlahan $s = \sin \alpha + \cos \beta = x + y$ ditentukan. Jika $xy = -\frac{1}{2}$ dan

$x + y = s$, maka x dan y adalah akar dari persamaan kuadrat

$$u^2 - su - \frac{1}{2} = 0 \dots (*)$$

Sehingga, $\{x, y\} = \left\{ \frac{s + \sqrt{s^2 + 2}}{2}, \frac{s - \sqrt{s^2 + 2}}{2} \right\}$. Dengan mengecek kondisi batas

$\frac{s + \sqrt{s^2 + 2}}{2} \leq 1$ didapatkan nilai $s \leq \frac{1}{2}$. Dengan mengecek kondisi batas yang sama,

dapat disimpulkan bahwa persamaan (*) memiliki pasangan x dan y dengan

$-1 \leq x, y \leq 1$ untuk semua $-\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}$. Karena kedua fungsi sinus dan kosinus

merupakan fungsi surjektif dari $\square$ pada interval $[-1, 1]$, wilayah

$s = \sin \alpha + \cos \beta$ adalah $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ untuk $\sin \alpha \cos \beta = -\frac{1}{2}$. Jadi, wilayah hasil (*range*)

s^2 adalah $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, *range* $(\cos \alpha \sin \beta)^2$ adalah $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, dan *range* untuk $\cos \alpha \sin \beta$

adalah $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

33. Misal a, b , dan c suatu bilangan real. Buktikan bahwa

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1).$$

Pembahasan: Misal $a = \tan x$, $b = \cos y$, $c = \tan z$ dengan $-\frac{\pi}{2} < x, y, z < \frac{\pi}{2}$.

Kemudian $a^2 + 1 = \sec^2 x$, $b^2 + 1 = \sec^2 y$, dan $c^2 + 1 = \sec^2 z$. Perkalian dari $\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z$ pada kedua sisi pertidaksamaan tersebut menghasilkan

$$[(ab + bc + ca - 1)\cos x \cos y \cos z]^2 \leq 1.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (ab + bc)\cos x \cos y \cos z &= \sin x \sin y \cos z + \cos x \sin y \sin z \\ &= \sin y \sin(x + z) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (ac - 1)\cos x \cos y \cos z &= \sin x \cos y \sin z - \cos x \cos y \cos z \\ &= -\cos y \cos(x + z). \end{aligned}$$

Akibatnya, akan didapatkan hasil

$$\begin{aligned} &[(ab + bc + ca - 1)\cos x \cos y \cos z]^2 \\ &= [\sin y \sin(x + z) - \cos y \cos(x + z)]^2 \\ &= \cos^2(x + y + z) \leq 1, \end{aligned}$$

sebagaimana yang ditanyakan.

34. Buktikan bahwa

$$(\sin x + a \cos x)(\sin x + b \cos x) \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Pembahasan: Jika $\cos x = 0$, maka pertidaksamaan menjadi $\sin^2 x \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Jika diasumsikan $\cos x \neq 0$, maka pembagian kedua sisi dengan $\cos^2 x$ memberikan

$$(\tan x + a)(\tan x + b) \leq \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \sec^2 x.$$

Anggap $t = \tan x$, maka $\sec^2 x = 1 + t^2$. Persamaan diatas menjadi

$$t^2 + (a+b)t + ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2 + t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 1$$

atau

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2 + 1 - (a+b)t + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0.$$

Pertidaksamaan tersebut setara dengan

$$\left(\frac{(a+b)t}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0,$$

dimana lebih sederhana.

35. Buktikan bahwa

$$|\sin a_1| + |\sin a_2| + \dots + |\sin a_n| + |\cos(a_1 + a_2 + \dots + a_n)| \geq 1.$$

Pembahasan: Kita mulai dengan induksi pada n . Pada dasarnya

$$|\sin a_1| + |\cos a_1| \geq \sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 = 1.$$

Untuk tahap induktif, cara lain yang dapat digunakan untuk membuktikan yaitu

$$|\sin a_1| + |\sin a_2| + \dots + |\sin a_{n+1}| + |\cos(a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1})| \geq 1,$$

persamaan tersebut disederhanakan menjadi

$$|\sin a_{n+1}| + |\cos(a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1})| \geq |\cos(a_1 + a_2 + \dots + a_n)|,$$

untuk bilangan riil $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. Misalkan $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, untuk $k = 1, 2, \dots, n+1$.

Persamaan terakhir menjadi $|\sin a_{n+1}| + |\cos s_{n+1}| \geq |\cos s_n|$. Tentu saja dengan rumus penjumlahan dan substraksi akan didapatkan

$$\begin{aligned} |\cos s_n| &= |\cos(s_{n+1} - a_{n+1})| \\ &= |\cos s_{n+1} \cos a_{n+1} + \sin s_{n+1} \sin a_{n+1}| \\ &= |\cos s_{n+1} \cos a_{n+1}| + |\sin s_{n+1} \sin a_{n+1}| \\ &\leq |\cos s_{n+1}| + |\sin a_{n+1}|, \end{aligned}$$

hasil ini yang dimaksud.

36. Buktikan bahwa

$$\frac{\sin^4 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^2 x = \csc^2 x.$$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^4 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^2 x \\ &= \frac{\sin^4 x + \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^4 x + \cos^2 x + \sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^4 x + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^4 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x \end{aligned}$$

37. Jika $\tan 15^\circ = p$. Buktikan bahwa

$$\frac{\tan 165^\circ - \tan 105^\circ}{1 + \tan 165^\circ \tan 105^\circ} = \frac{1-p}{2}.$$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} & \frac{\tan 165^\circ - \tan 105^\circ}{1 + \tan 165^\circ \tan 105^\circ} \\ &= \frac{\tan (180 - 15)^\circ - \tan (90 + 15)^\circ}{1 + \tan (180 - 15)^\circ \cdot \tan (90 + 15)^\circ} \\ &= \frac{-\tan 15^\circ + \cot 15^\circ}{1 + (-\tan 15^\circ)(\cot 15^\circ)} = \frac{-p+1}{1+1} = \frac{1-p}{2} \end{aligned}$$

38. Diketahui $\cos \alpha \tan \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0$ untuk $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Carilah nilai $\sec \alpha$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cdot \tan \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0 \\ & \Leftrightarrow \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{3} \\ & \Leftrightarrow \sec \alpha = \sec \frac{5\pi}{3} = 2 \end{aligned}$$

39. Diketahui $\tan x = -\frac{2}{3}$. Tentukan nilai dari $\frac{5\sin x + 6\cos x}{2\cos x - 3\sin x}$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} & \frac{5\sin x + 6\cos x}{2\cos x - 3\sin x} \\ &= \frac{5\sin x + 6\cos x}{2\cos x - 3\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} \\ &= \frac{5\tan x + 6}{2 - 3\tan x} = \frac{-\frac{10}{3} + \frac{18}{3}}{2 + 2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

40. Tentukan nilai dari

$$\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24}.$$

Pembahasan: Jika $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, maka $\sin x = \frac{\sin 2x}{2 \cos x}$. Sehingga,

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{24}}{2 \cos \frac{\pi}{24}} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{24}}{2} \cdot \frac{\sin \frac{10\pi}{24}}{2 \cos \frac{\pi}{24}} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \\ &= \sin \frac{2\pi}{24} \cdot \frac{\sin \frac{10\pi}{24}}{4} \\ &= \frac{\sin \frac{4\pi}{24}}{2 \cos \frac{2\pi}{24}} \cdot \frac{\sin \frac{10\pi}{24}}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

41. Jika $A + B = 225^\circ$. Tentukan nilai dari

$$\frac{\cot A}{1 + \cot A} \cdot \frac{\cot B}{1 + \cot B}.$$

Pembahasan: Diketahui bahwa

$$A + B = 225^\circ \Leftrightarrow A = 225^\circ - B$$

$$\Leftrightarrow \tan A = \tan(225^\circ - B) = \frac{\tan 225^\circ - \tan B}{1 + \tan 225^\circ \tan B} = \frac{1 - \tan B}{1 + \tan B}.$$

Sehingga,

$$\frac{\cot A}{1 + \cot A} \cdot \frac{\cot B}{1 + \cot B} = \frac{1}{1 + \tan A} \cdot \frac{1}{1 + \tan B}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{1-\tan B}{1+\tan B} + 1} \cdot \frac{1}{1+\tan B} \\
&= \frac{1+\tan B}{2} \cdot \frac{1}{1+\tan B} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

42. Buktikan bahwa

$$\frac{\sin 3744^\circ}{\cos 774^\circ} \cdot \frac{\sin 1854^\circ}{\cos^2 396^\circ} = \sec 36^\circ.$$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin 3744^\circ}{\cos 774^\circ} \cdot \frac{\sin 1854^\circ}{\cos^2 396^\circ} \\
&= \frac{\sin(10 \times 360^\circ + 144^\circ) \cdot \sin(5 \times 360^\circ + 54^\circ)}{\cos(3 \times 360^\circ + 54^\circ) \cdot (\cos(360^\circ + 36^\circ))^2} \\
&= \frac{\sin 144^\circ \sin 54^\circ}{\cos 54^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 36^\circ} \\
&= \frac{\sin 36^\circ \sin 54^\circ}{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 36^\circ} = \frac{1}{\cos 36^\circ} \\
&= \sec 36^\circ
\end{aligned}$$

43. Suatu segitiga ABC dengan $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Buktikan bahwa

$$\frac{1 + \cos A - \cos B + \cos C}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} = \tan \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C.$$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
&\frac{1 + \cos A - \cos B + \cos C}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} \\
&= \frac{1 + 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B) + 2 \cos^2 \frac{1}{2} C - 1}{1 + 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) - 1 + 2 \sin^2 \frac{1}{2} C} \\
&= \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B) + 2 \sin^2 \frac{1}{2}(A-B)}{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) + 2 \cos^2 \frac{1}{2}(A+B)} \\
&= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) (\sin \frac{1}{2}(A+B) - \sin \frac{1}{2}(A-B))}{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) (\cos \frac{1}{2}(A+B) + \cos \frac{1}{2}(A-B))} \\
&= \frac{\cos \frac{1}{2} C (2 \cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B)}{\sin \frac{1}{2} C (\cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B)} \\
&= \cot \frac{1}{2} C \cdot \tan \frac{1}{2} B
\end{aligned}$$

44. Jika $\cos A = \frac{3}{4}$. Tentukan $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2}$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} &= -\frac{1}{2} \left(-2 \sin \frac{5A}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos 3A - \cos 2A) \\ &= -\frac{1}{2} \left[(4 \cos^3 A - 3 \cos A) - (2 \cos^2 A - 1) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left(4 \cdot \frac{27}{64} - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{9}{16} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{27}{16} - \frac{36}{16} - \frac{18}{16} + \frac{16}{16} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-11}{16} \right) = \frac{11}{32}\end{aligned}$$

45. Diketahui bahwa

$$\begin{cases} a = \sin [\sin (3x - 2y) \sin 2(x - y)] \\ b = \cos [\cos (3x - 2y) \cos 2(x - y)] \end{cases}$$

Tentukan nilai $\cos (\cos x)$ jika dinyatakan dengan a dan b .

Pembahasan: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}a &= \sin [\sin (3x - 2y) \sin 2(x - y)] \\ \Leftrightarrow \sin (3x - 2y) \sin 2(x - y) &= \sin^{-1} a \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cos (5x - 4y) + \frac{1}{2} \cos x &= \sin^{-1} a \cdots (1)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}b &= \cos [\cos (3x - 2y) \cos 2(x - y)] \\ \Leftrightarrow \cos (3x - 2y) \cos 2(x - y) &= \cos^{-1} b \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos (5x - 4y) + \frac{1}{2} \cos x &= \cos^{-1} b \cdots (2)\end{aligned}$$

Dengan menjumlah persamaan (1) dan (2) akan didapatkan

$$(1) + (2) \Leftrightarrow \cos x = \sin^{-1} a + \cos^{-1} b,$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\cos(\cos x) &= \cos(\sin^{-1} a + \cos^{-1} b) \\
&= \cos(\sin^{-1} a) \cdot \cos(\cos^{-1} b) - \sin(\sin^{-1} a) \cdot \sin(\cos^{-1} b) \\
&= \sqrt{1 - (\sin(\sin^{-1} a))^2} \cdot (b - a) \cdot \sqrt{1 - (\cos(\cos^{-1} b))^2} \\
&= b\sqrt{1 - a^2} - a\sqrt{1 - b^2}
\end{aligned}$$

9 Pembahasan Soal Lanjutan Trigonometri

1. Tentukan bilangan positif n terkecil yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin n^\circ}.$$

Pembahasan: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\sin 1^\circ &= \sin[(x+1)^\circ - x^\circ] \\ &= \sin(x+1)^\circ \cos x^\circ - \cos(x+1)^\circ \sin x^\circ.\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\frac{\sin 1^\circ}{\sin x^\circ \sin(x+1)^\circ} &= \frac{\cos x^\circ \sin(x+1)^\circ - \sin x^\circ \cos(x+1)^\circ}{\sin x^\circ \sin(x+1)^\circ} \\ &= \cot x^\circ - \cot(x+1)^\circ.\end{aligned}$$

Perkalian kedua sisi persamaan yang ditanyakan dengan $\sin 1^\circ$ didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{\sin 1^\circ}{\sin n^\circ} &= (\cot 45^\circ - \cot 46^\circ) + (\cot 47^\circ - \cot 48^\circ) + \cdots + (\cot 133^\circ - \cot 134^\circ) \\ &= \cot 45^\circ - (\cot 46^\circ + \cot 134^\circ) + (\cot 47^\circ + \cot 133^\circ) - \cdots + (\cot 89^\circ + \cot 91^\circ) - \cot 90^\circ \\ &= 1.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\sin n^\circ = \sin 1^\circ$ dan kemungkinan bilangan positif n terkecilnya adalah 1.

2. Misal x, y, z suatu bilangan riil positif. Buktikan bahwa

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

bila $x + y + z = xyz$.

Pembahasan: Dengan melihat Soal Pendahuluan 17 (a), diketahui segitiga ABC dengan $\tan A = x$, $\tan B = y$, dan $\tan C = z$. Perhatikan bahwa

$$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \frac{\tan A}{\sec A} = \sin A.$$

Sehingga, persamaan diatas menjadi

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

persamaan tersebut terdapat pada soal 23 (c).

3. Misal x, y, z suatu bilangan riil dengan $x \geq y \geq z \geq \frac{\pi}{12}$ dimana $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Carilah nilai minimum dari $\cos x \sin y \cos z$.

Pembahasan: Misal $p = \cos x \sin y \cos z$. Karena $\frac{\pi}{2} \geq y \geq z$, $\sin(y - z) \geq 0$. Dengan menggunakan rumus penjumlahan sinus-cosinus didapatkan

$$p = \frac{1}{2} \cos x [\sin(y + z) + \sin(y - z)] \geq \frac{1}{2} \cos x \sin(y + z) = \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

Perhatikan bahwa $x = \frac{\pi}{2} - (y + z) \leq \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$. Sehingga, nilai minimum p

adalah $\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$, diperoleh ketika $x = \frac{\pi}{3}$ dan $y = z = \frac{\pi}{12}$.

4. Misal ABC suatu segitiga lancip dengan sisi-sisi a, b, c , dan wilayah K . Buktikan bahwa

$$\sqrt{a^2 b^2 - 4K^2} + \sqrt{b^2 c^2 - 4K^2} + \sqrt{c^2 a^2 - 4K^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Pembahasan: Diketahui bahwa $2K = ab \sin C = ca \sin B = bc \sin A$. Persamaan pada sisi kiri diatas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 b^2 - a^2 b^2 \sin^2 C} + \sqrt{b^2 c^2 - b^2 c^2 \sin^2 A} + \sqrt{a^2 c^2 - a^2 c^2 \sin^2 B} \\ &= ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B \\ &= \frac{a}{2} (b \cos C + c \cos B) + \frac{b}{2} (c \cos A + a \cos C) + \frac{c}{2} (a \cos B + b \cos A) \\ &= \frac{a}{2} \cdot a + \frac{b}{2} \cdot b + \frac{c}{2} \cdot c \end{aligned}$$

5. Hitunglah penjumlahan antara

$$\binom{n}{1} \sin a + \binom{n}{2} \sin 2a + \dots + \binom{n}{n} \sin na$$

dan

$$\binom{n}{1} \cos a + \binom{n}{2} \cos 2a + \dots + \binom{n}{n} \cos na$$

6. Carilah nilai minimum dari

$$|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

untuk setiap bilangan riil x .

Pembahasan: Anggap bahwa $a = \sin x$ dan $b = \cos x$. Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} P &= \left| a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right| \\ &= \left| \frac{ab(a+b) + a^2 + b^2 + a + b}{ab} \right| \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $a^2 + b^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Anggap $c = a + b$, sehingga $c^2 = (a + b)^2 = 1 + 2ab$ dan $2ab = c^2 - 1$. Dengan menggunakan rumus penjumlahan sinus-cosinus akan didapatkan

$$c = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right);$$

sehingga wilayah c berada dalam interval $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Akibatnya, nilai minimum dari fungsi tersebut dapat dicari dengan

$$\begin{aligned} P(c) &= \left| \frac{2ab(a+b) + 2 + 2(a+b)}{2ab} \right| \\ &= \left| \frac{c(c^2 - 1) + 2(c+1)}{c^2 - 1} \right| = \left| c + \frac{2}{c-1} \right| \\ &= \left| c - 1 + \frac{2}{c-1} + 1 \right|. \end{aligned}$$

untuk c dalam interval $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Jika $c - 1 > 0$, maka dengan pertidaksamaan

geometri-aritmatik didapatkan $(c-1) + \frac{2}{c-1} > 2\sqrt{2}$ dan $P(c) > 1 + 2\sqrt{2}$. Jika

$c - 1 < 0$, maka didapatkan

$$(c-1) + \frac{2}{c-1} = - \left((1-c) + \frac{2}{1-c} \right) \leq -2\sqrt{2},$$

dengan persamaan jika dan hanya jika $1-c = \frac{2}{1-c}$ atau $c = 1 - \sqrt{2}$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai minimumnya adalah $|-2\sqrt{2} + 1| = 2\sqrt{2} - 1$ yang berlaku pada $c = 1 - \sqrt{2}$.

7. Misal a, b , dan c suatu bilangan riil dimana

$$\sin a + \sin b + \sin c \geq \frac{3}{2}$$

Buktikan bahwa

$$\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$$

Pembahasan: Asumsikan bahwa

$$\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c - \frac{\pi}{6}\right) < 0$$

Kemudian dengan menggunakan rumus penjumlahan sinus didapatkan

$$\frac{1}{2}(\cos a + \cos b + \cos c) > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin a + \sin b + \sin c) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Sehingga,

$$\cos a + \cos b + \cos c \geq \frac{3}{2},$$

yang menyebabkan

$$\begin{aligned} & \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(b + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(c + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sin a + \sin b + \sin c) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos a + \cos b + \cos c) \\ &> \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3, \end{aligned}$$

Hal ini mungkin karena $\sin x < 1$.

8. Misal a dan b bilangan riil dalam interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Buktikan bahwa

$$\sin^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 b + \cos^6 b = 1$$

jika dan hanya jika $a = b$.

Pembahasan: Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$(\sin^2 a)^3 + (\cos^2 b)^3 + (-1)^3 - 3(\sin^2 a)(\cos^2 b)(-1) = 0.$$

Kita menggunakan identitas

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z) \left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \right].$$

Misal $x = \sin^2 a$, $y = \cos^2 b$, dan $z = -1$. Berdasarkan persamaan sebelumnya, kita mempunyai $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. Jadi,

$$x + y + z = 0 \text{ atau } (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0.$$

Sebelumnya, $x = y = z$, atau $\sin^2 a = \cos^2 b = -1$, dimana hal ini mungkin. Sehingga, $x + y + z = 0$, akibatnya $\sin^2 a + \cos^2 b - 1 = 0$, atau $\sin^2 a = 1 - \cos^2 b$. Hal ini sesuai dengan $\sin^2 a = \sin^2 b$ dimana $0 \leq a, b \leq \frac{\pi}{2}$, dan $a = b$.

Meskipun setiap langkah penyelesaian tersebut dilakukan secara dua arah (reversibel), kita dapat menunjukkan secara eksplisit jika $a = b$, maka

$$\sin^6 a + \cos^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 a = 1.$$

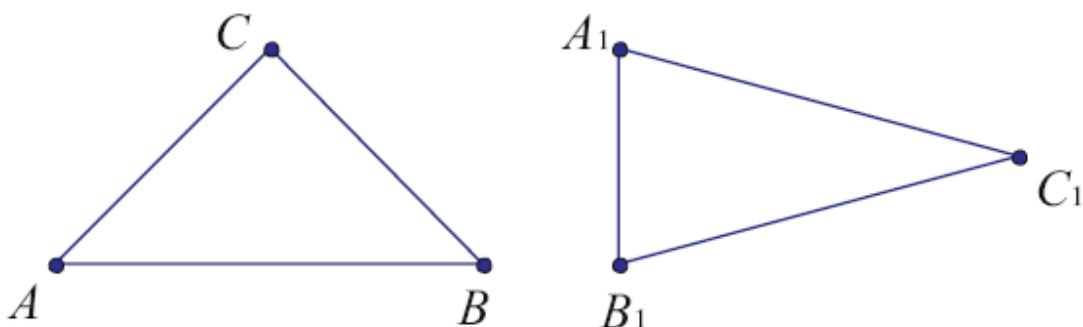
Akhirnya persamaan pada sisi sebelah kiri dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} & (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a) + 3\sin^2 a \cos^2 a \\ &= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 3\sin^2 a \cos^2 a + 3\sin^2 a \cos^2 a = 1. \end{aligned}$$

9. Sudut-sudut dalam segitiga ABC kurang dari 120° . Buktikan bahwa

$$\frac{\cos A + \cos B - \cos C}{\sin A + \sin B - \sin C} > -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pembahasan: Perhatikan segitiga $A_1B_1C_1$ seperti yang ditunjukkan pada gambar, dimana $\angle A_1 = 120^\circ - \angle A$, $\angle B_1 = 120^\circ - \angle B$, dan $\angle C_1 = 120^\circ - \angle C$. Kondisi ini menyebabkan mungkin terbentuk segitiga.



Dengan menerapkan pertidaksamaan segitiga dalam segitiga $A_1B_1C_1$ memberikan $B_1C_1 + C_1A_1 > A_1B_1$; dimana

$$\sin A_1 + \sin B_1 > \sin C_1$$

dengan menerapkan hukum sinus pada segitiga $A_1B_1C_1$. Hal tersebut sesuai dengan

$$\sin(120^\circ - A) + \sin(120^\circ - B) > \sin(120^\circ - C),$$

atau

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos A + \cos B - \cos C) + \frac{1}{2}(\sin A + \sin B - \sin C) > 0.$$

Dengan memisalkan $a + b > c$ yang menggambarkan $\sin A_1 + \sin B_1 - \sin C_1 > 0$, sehingga pertidaksamaan dapat dituliskan

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos A + \cos B - \cos C}{\sin A + \sin B - \sin C} + \frac{1}{2} > 0,$$

dari pertidaksamaan ini hasil akan didapatkan.

10. Buktikan bahwa rerata dari

$$2\sin 2^\circ, 4\sin 4^\circ, 6\sin 6^\circ, \dots, 180\sin 180^\circ$$

adalah $\cot 1^\circ$.

Pembahasan: Kita perlu membuktikan bahwa

$$2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \dots + 178\sin 178^\circ = 90\cot 1^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2^\circ \cdot \sin 1^\circ + 2(2\sin 4^\circ \cdot \sin 1^\circ) + \dots + 89(2\sin 178^\circ \cdot \sin 1^\circ) = 90\cos 1^\circ$$

Perhatikan bahwa

$$2\sin 2k^\circ \sin 1^\circ = \cos(2k-1)^\circ - \cos(2k+1)^\circ.$$

Sehingga didapatkan bahwa

$$\begin{aligned} & 2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2(2\sin 4^\circ \sin 1^\circ) + \dots + 89(2\sin 178^\circ \sin 1^\circ) \\ &= (\cos 1^\circ - \cos 3^\circ) + 2(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) + \dots + 89(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ) \\ &= \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 177^\circ - 89\cos 179^\circ \\ &= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \dots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) + 89\cos 1^\circ \\ &= \cos 1^\circ + 89\cos 1^\circ = 90\cos 1^\circ \end{aligned}$$

, terbukti.

11. Misalkan $\{a_n\}$ suatu bagian dari bilangan riil yang didefinisikan dengan $a_1 = t$ dan $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ untuk $n \geq 1$. Untuk berapa banyak nilai t yang diketahui jika $a_{1998} = 0$?

Pembahasan:

Misal $f(x) = 4x(1 - x) = 1 - (2x - 1)^2$. Perhatikan, jika $0 \leq f(x) \leq 1$, maka $0 \leq x \leq 1$.

Sehingga, jika $a_{1998} = 0$, maka kita akan mendapatkan $0 \leq t \leq 1$. Kemudian dapat digunakan suatu sudut dimana $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dengan $\sin \theta = \sqrt{t}$. Perlu diketahui bahwa hal tersebut berlaku untuk $\phi \in \mathbb{R}$,

$$f(\sin^2 \phi) = 4\sin^2 \phi (1 - \sin^2 \phi) = 4\sin^2 \phi \cos^2 \phi = \sin^2 2\phi;$$

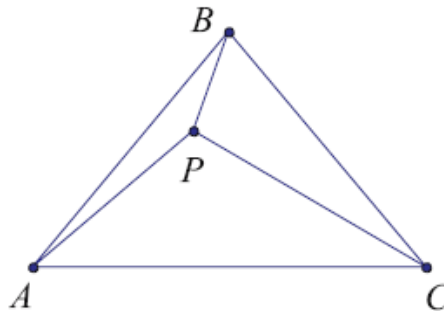
dengan $a_1 = \sin^2 2\theta$, sehingga

$$a_2 = \sin^2 2\theta, a_3 = \sin^2 4\theta, \dots, a_{1998} = \sin^2 2^{1997} \theta.$$

Jadi, $a_{1998} = 0 \Leftrightarrow 2^{1997} \theta = 0$. Sehingga, nilai $t = \sin^2(k\pi / 2^{1997})$ untuk $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{1996}$.

12. Segitiga ABC diketahui mempunyai hal berikut ini: didalamnya terdapat titik P dengan $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, dan $\angle PAC = 40^\circ$. Buktikan bahwa segitiga ABC samasisi.

Pembahasan: Perhatikan gambar berikut.



Misalkan $x = \angle PCB$ (dalam derajat). Kemudian $\angle PBC = 80^\circ - x$. Dengan hukum sinus didapatkan bahwa

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{PA}{PB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{PC}{PA} = \frac{\sin \angle PBA}{\sin \angle PAB} \cdot \frac{\sin \angle PCB}{\sin \angle PBC} \cdot \frac{\sin \angle PAC}{\sin \angle PCA} \\ &= \frac{\sin 20^\circ \sin x \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ \sin(80^\circ - x) \sin 30^\circ} = \frac{4 \sin x \sin 40^\circ \cos 10^\circ}{\sin(80^\circ - x)}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus penjumlahan sinus didapatkan

$$1 = \frac{2 \sin x (\sin 30^\circ + \sin 50^\circ)}{\sin(80^\circ - x)} = \frac{\sin x (1 + 2 \cos 40^\circ)}{\sin(80^\circ - x)},$$

dan juga

$$2 \sin x \cos 40^\circ = \sin(80^\circ - x) - \sin x = 2 \sin(40^\circ - x) \cos 40^\circ.$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa $x = 40^\circ - x$, atau $x = 20^\circ$. Sehingga, $\angle ACB = 50^\circ = \angle BAC$, dimana segitiga ABC merupakan segitiga sama kaki.

13. Misalkan $a_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ dan $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 5}{2(a_n + 2)}$ untuk bilangan $n > 0$. Buktikan

bahwa

$$a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$$

untuk semua nilai n .

Pembahasan: Dengan menggunakan rumus sudut ganda, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \cot \frac{\pi}{24} &= \frac{\cos \frac{\pi}{24}}{\sin \frac{\pi}{24}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{24}}{2 \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24}} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + 8 + 4\sqrt{3}}{4} \\ &= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = a_0 + 2. \end{aligned}$$

Jadi, $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ adalah benar untuk $n = 0$.

Hal tersebut berlaku pada $b_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)$, dimana $b_n = a_n + 2$, $n \geq 1$. Hubungan

rekursif fungsi tersebut menjadi

$$b_{n+1} - 2 = \frac{(b_n - 2)^2 - 5}{2b_n},$$

atau

$$b_{n+1} = \frac{b_n^2 - 1}{2b_n}.$$

Dengan asumsi induktif bahwa $b_k = \cot c_k$, dimana $c_k = \frac{2^{k-3}\pi}{3}$, menghasilkan

$$b_{k+1} = \frac{\cot^2 c_k - 1}{2 \cot c_k} = \cot 2c_k = \cot c_{k+1}.$$

14. Misal n suatu bilangan dengan $n \geq 2$. Buktikan bahwa

$$\prod_{k=1}^n \tan \left[\frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{3^k}{3^n - 1} \right) \right] = \prod_{k=1}^n \cot \left[\frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{3^k}{3^n - 1} \right) \right].$$

Pembahasan: Misal

$$u_k = \tan \left[\frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{3^k}{3^n - 1} \right) \right] \text{ dan } v_k = \tan \left[\frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{3^k}{3^n - 1} \right) \right].$$

Persamaan tersebut menjadi

$$\prod_{k=1}^n u_k v_k = 1.$$

$$\text{Anggap bahwa } t_k = \tan \frac{3^{k-1}\pi}{3^n - 1}.$$

Sehingga,

$$u_k = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3^{k-1}\pi}{3^n - 1} \right) = \frac{\sqrt{3} + t_k}{1 - \sqrt{3}t_k} \text{ dan } v_k = \frac{\sqrt{3} - t_k}{1 + \sqrt{3}t_k}.$$

Dengan rumus sudut tripel didapatkan

$$t_{k+1} = \frac{3t_k - t_k^3}{1 - 3t_k^2},$$

sehingga

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{3 - t_k^2}{1 - 3t_k^2} = \frac{\sqrt{3} + t_k}{1 - \sqrt{3}t_k} \cdot \frac{\sqrt{3} - t_k}{1 + \sqrt{3}t_k} = u_k v_k.$$

Dari hal tersebut disimpulkan bahwa

$$\prod_{k=1}^n (u_k v_k) = \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \dots \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3^{n-1}}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{3^n - 1}\right)} = 1.$$

10 Latihan Soal Trigonometri

1. Misalkan ABC suatu segitiga. Buktikan bahwa

$$(a) \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4};$$

$$(b) \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

2. Dalam segitiga ABC, tunjukkan bahwa

$$(a) 4R = \frac{abc}{[ABC]};$$

$$(b) 2R^2 \sin A \sin B \sin C = [ABC];$$

$$(c) 2R \sin A \sin B \sin C = r(\sin A + \sin B + \sin C);$$

$$(d) r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2};$$

$$(e) a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{abc}{2R^2}.$$

3. Dalam segitiga ABC, tunjukkan bahwa

$$(a) \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2};$$

$$(b) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2};$$

$$(c) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4. Buktikan bahwa segitiga ABC samakaki jika dan hanya jika

$$a \cos B + b \cos C + c \cos A = \frac{a+b+c}{2}.$$

5. Misal $a = \frac{\pi}{7}$.

- (a) Tunjukkan bahwa $\sin^2 3a - \sin^2 a = \sin 2a \sin 3a$;
 (b) Tunjukkan bahwa $\csc a = \csc 2a + \csc 4a$;
 (c) Hitunglah $\cos a - \cos 2a + \cos 3a$;
 (d) Buktikan bahwa $\cos a$ adalah irasional;
 (e) Hitunglah $\tan a \tan 2a \tan 3a$;

6. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 89^\circ \sin 90^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}.$$

7. Buktikan bahwa dalam segitiga lancip ABC berlaku

$$\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6 \cot A \cot B \cot C \geq \cot A + \cot B + \cot C.$$

8. Misal x, y, z suatu bilangan riil dan semuanya tidak sama dengan $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ dan $x + y + z$

$= xyz$. Buktikan bahwa

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}.$$

9. Selesaikan pertidaksamaan berikut

$$10^{3(x-1)} - 3 \cdot 10^{x-1} > \sqrt{3}.$$

10. Misal n bilangan positif dan θ_i suatu sudut dengan $0^\circ < \theta_i < 90^\circ$ dimana

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cdots + \cos^2 \theta_n = 1.$$

Buktikan bahwa

$$\tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \cdots + \tan \theta_n \geq (n-1)(\cot \theta_1 + \cot \theta_2 + \cdots + \cot \theta_n).$$

Daftar Pustaka

1. Andreescu, T. and Feng, Z. 2001. *101 Problems in Algebra from the Training of the USA IMO Team*. Australian Mathematics Trust.
2. Andreescu, T. and Feng, Z. 2002. *USA and International Mathematical Olympiads 2001*. Mathematical Association of America.
3. Brennan, J.W. 2002. *Understanding Algebra*. www.jamesbrennan.org/algebra.
4. Djukic, D., Jankovic, V., et al. 2006. *The IMO Compendium: A Collection of Problems*. Springer.
5. Engel, A. 1998. *Problem-Solving Strategies*. Springer.
6. Lozansky, E. and Rousseau, C. 1996. *Winning Solutions*. Springer.
7. Naskah Soal Olimpiade Tingkat Kabupaten Tahun 2008.
8. Naskah Soal Olimpiade Tingkat Provinsi Tahun 2008.
9. Naskah Soal Olimpiade Tingkat Nasional Tahun 2007 dan 2008.
10. Naskah Soal Princeton University Mathematics Competition (PuMAC) 2006.
11. Posamentier, A.S. 1988. *Challenging Problem in Algebra*. Dover Pub.
12. Pranesachar, C.R., et al. 1994. *Problem Primer for the Olympiad*. Interline Pub.