



Sumber: www.gerryscakes.com

Bab IV

Matriks

Pada bab sebelumnya, Anda telah mempelajari persamaan dan pertidaksamaan. Bentuk persamaan dapat diubah ke bentuk matriks untuk mempermudah dalam perhitungan, misalnya aplikasi berikut ini. Tia, Mirna, dan Yenny akan memesan 3 macam kue, kue yang dipesan Tia, adalah 3 kue rasa coklat, 2 kue rasa keju, dan 2 kue rasa susu. Mirna memesan 4 kue rasa coklat, 1 kue rasa keju, dan 1 kue rasa susu, sedangkan Yenny memesan 2 kue rasa coklat, 3 kue rasa keju, dan 2 kue rasa susu. Jika harga untuk satu kue rasa coklat, kue rasa keju, dan kue rasa susu masing-masing adalah Rp2.000,00, Rp2.500,00, dan Rp1.500,00. Berapakah jumlah uang yang harus dibayarkan oleh masing-masing orang?

Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan matriks. Untuk itu, pelajilah bab ini dengan baik.

- A. Pengertian dan Jenis Matriks**
- B. Operasi Aljabar pada Matriks**
- C. Determinan dan Invers Matriks**
- D. Aplikasi Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel**

Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Selesaikan persamaan berikut ini.

a. $2x + 5 = -3$

b. $2(x + 9) + 6 = x + 20$
2. Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode gabungan eliminasi dan substitusi.

a. $2x + 4y = 5$

$-5x + 2y = 10$

b. $x - y = 4$

$2x + y = 13$

A. Pengertian dan Jenis Matriks

1. Pengertian Matriks



Sumber: smatb.files.wordpress.com

Gambar 4.1
Data absensi siswa dapat ditampilkan dalam bentuk matriks

Dalam kehidupan sehari-hari Anda pasti sering dihadapkan pada informasi yang disajikan dalam bentuk tabel. Sebagai contoh, jika Anda seorang pecinta sepakbola, Anda pasti sering memperhatikan dan mencari informasi mengenai klasemen sementara dari kejuaraan yang diikuti oleh tim kesayangan Anda.

Banyak informasi yang sering disajikan dalam bentuk tabel, diantaranya data rekening telepon, data tagihan listrik, data tabungan, harga penjualan barang, data absensi siswa dan lain-lain. Sebagai ilustrasi awal untuk memahami pengertian matriks, pelajari uraian berikut.

Diketahui data kunjungan wisatawan, baik domestik maupun asing di suatu objek wisata selama empat bulan berturut-turut, disajikan dalam tabel berikut (dalam ribuan).

Tabel 4.1. Jumlah kunjungan wisatawan domestik dan asing				
Bulan \ Wisatawan	I	II	III	IV
Domestik	7	6	8	6
Asing	1	2	1	3

Berdasarkan Tabel 4.1, Anda pasti memperhatikan setiap keterangan yang ada terkait jumlah wisatawan domestik maupun asing dalam bentuk angka yang tertera pada tabel yang disusun letaknya berdasarkan baris dan kolom.

Tabel yang baru Anda baca dapat disederhanakan dengan menghilangkan keterangan-keterangan yang terdapat pada tabel, dan mengganti tabel dengan tanda kurung seperti berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kini, data yang telah diubah bentuknya hanya terdiri atas bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom. Bentuk baru seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Matriks merupakan kumpulan bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom sedemikian sehingga tampak seperti bentuk sebuah persegi panjang.

Sebuah matriks memuat tanda kurung sebagai pembatas. Tanda kurung yang digunakan dapat berupa tanda kurung biasa ataupun tanda kurung siku. Pada umumnya, matriks diberi nama dengan memakai huruf kapital, seperti A,

B, C . Bilangan-bilangan yang menyusun sebuah matriks dinamakan unsur atau anggota dari matriks tersebut dan dinotasikan dengan huruf kecil berindeks yang menyatakan letak dari unsur tersebut dalam matriks (baris dan kolom).

Perhatikan kembali matriks pada uraian sebelumnya. Misalkan matriks tersebut adalah matriks A maka

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada matriks A , yang dimaksud dengan a_{23} adalah unsur dari matriks A yang berada pada baris kedua dan kolom ketiga, yaitu 1. Jika Anda perhatikan, matriks A terdiri atas 2 buah baris dan 4 buah kolom. Banyaknya baris dan kolom yang menyusun sebuah matriks dinamakan sebagai ordo atau ukuran matriks. Sehingga matriks A disebut sebagai matriks berordo 2×4 .

Secara umum, matriks dengan m baris dan n kolom dapat disajikan sebagai berikut.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{baris 1} \\ \longrightarrow \text{baris 2} \\ \\ \longrightarrow \text{baris } m \end{matrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 kolom 1 kolom 2 kolom n

Contoh Soal 4.1

Diketahui, matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- ordo matriks B ,
- b_{12} dan b_{23} ,
- banyaknya elemen pada matriks B .

Jawab:

- Ordo dari matriks B adalah 2×3 karena matriks B terdiri dari 2 baris dan 3 kolom.
- b_{12} artinya unsur matriks B yang terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-2 sehingga $b_{12} = -4$.
 b_{23} artinya unsur matriks B yang terletak pada baris ke-2 dan kolom ke-3 sehingga $b_{23} = -2$.
- Matriks B memiliki 6 unsur.

Info Math

Arthur Cayley
(1821–1895)



Teori tentang matriks pertama kali dikembangkan oleh Arthur Cayley (1821–1895) pada 1857. Sekarang, matriks telah menjadi alat yang berguna di berbagai bidang. Adapun metode determinan ditemukan oleh Seki Kowa (1642–1708) pada 1683 di Jepang dan ditemukan pula oleh Gottfried Wilhelm Von Leibnitz (1646–1716) di Jerman. Keduanya hanya menggunakan matriks dalam persamaan linear.

Sumber: *Finite Mathematics and It's Applications*, 1996

Contoh Soal 4.2

Tentukan matriks koefisien dari sistem persamaan linear berikut.

$$-2x + y - z = 16$$

$$4x - y + 2z = 12$$

$$x + 2y - 3z = -9$$

Jawab:

Matriks koefisien dari sistem persamaan tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Jenis-Jenis Matriks

Matriks terdiri atas berbagai jenis antara lain, matriks nol, matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks diagonal, dan matriks identitas.

Agar Anda lebih memahami mengenai jenis matriks tersebut perhatikan uraian materi berikut.

a. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya bernilai nol, contohnya

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 0]$$

Semua unsur pada matriks A, B, dan C adalah angka 0, sehingga disebut sebagai matriks nol.

b. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri atas satu baris saja, contohnya

$$P = [5 \ 2 \ -3] \quad Q = [-3 \ 2] \quad R = [6 \ 4 \ 10 \ -6]$$

Matriks P berordo 1×3 , Q berordo 1×2 , dan R berordo 1×4 . Matriks P, Q, dan R di atas hanya memiliki satu baris saja sehingga disebut sebagai matriks baris.

c. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom, contohnya

$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriks K berordo 2×1 , matriks L berordo 3×1 , dan matriks M berordo 4×1 . Matriks K, L, dan M di atas hanya memiliki satu kolom saja sehingga disebut sebagai matriks kolom.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang banyak baris dan banyak kolomnya sama, contohnya

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Tugas 4.1

Diskusikan dengan teman sebangku Anda.

1. Apakah matriks persegi merupakan matriks diagonal? Berikan alasannya.
2. Apakah matriks diagonal merupakan matriks persegi? Berikan alasannya.

Matriks N berordo 2×2 dan matriks M berordo 3×3 . Karena banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, maka matriks N dan M disebut sebagai matriks persegi.

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol, sebagai contohnya

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \text{ diagonal utama}$$

f. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol, contohnya

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

g. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen-elemennya bernilai nol, kecuali pada diagonal utamanya tidak selalu nol, sebagai contoh

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

h. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Kesamaan Dua Matriks

Dalam matriks dikenal adanya kesamaan dua matriks yang didefinisikan sebagai berikut.

Dua matriks dikatakan sama jika ordo yang dimiliki keduanya sama, dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.

Supaya Anda lebih memahami definisi tersebut, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.3

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & \frac{4}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Diketahui matriks

$$\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ b & 2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2a & 2 & ab \end{bmatrix}$$

Nilai dari $a + b + c = \dots$

a. 12 **d.** 18

b. 14 **e.** 20

c. 16

Jawab:

$$a = 2$$

$$b = 2a$$

$$= 2 \cdot 2 = 4$$

$$c = a \cdot b$$

$$= 2 \cdot 4 = 8$$

$$\text{Nilai dari } a + b + c = 2 + 4 + 8 = \mathbf{14}$$

Jawaban: **b**

Sumber: UAN SMK 2003



Jika

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2p \\ p+2q & 8 \\ 5 & r \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & q-1 \end{bmatrix}$$

dan $P = Q^T$

maka nilai p , $2q$, dan $3r$ berturut-turut adalah

- 1, 2, dan 3
- 1, 4, dan 9
- 3, 2, dan 1
- 3, 4, dan 3
- 3, 4, dan 4

Jawab:

$P = Q^T$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \\ 5 & q-1 \end{bmatrix}$$

$P = Q^T$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2p \\ p+2q & 8 \\ 5 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \\ 5 & q-1 \end{bmatrix}$$

$$2p = 6 \Leftrightarrow p = 3$$

$$p + 2q = 7 \Leftrightarrow 3 + 2q = 7$$

$$2q = 4$$

$$q = 2$$

$$r = q - 1 \Leftrightarrow r = 2 - 1 = 1$$

Jadi, nilai dari $p = 3$, $2q = 4$ dan $3r = 3$.

Jawaban: **d**

Sumber: UN SMK 2007

Tentukan apakah:

a. $A = B$, c. $A = D$.

b. $A = C$,

Jawab:

a. $A \neq B$ karena ordo matriks A tidak sama dengan ordo matriks B .

b. $A = C$ karena ordo matriks A sama dengan ordo matriks B dan elemen-elemen yang bersesuaian pada matriks A sama dengan elemen-elemen pada matriks C .

c. $A \neq D$ karena elemen-elemen yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut ada yang tidak sama, yaitu $a_{22} \neq d_{22}$.

Contoh Soal 4.4

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3x & -2 \\ 2y & 2 \end{bmatrix}$ dan $A = B$

maka tentukanlah nilai $x + y$.

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & -2 \\ 2y & 2 \end{bmatrix}$$

Karena $A = B$ maka diperoleh

$$3x = 3 \quad \text{dan} \quad 2y = -4$$

$$x = 1 \quad \quad \quad y = -2$$

Dengan demikian, $x + y = 1 + (-2) = -1$

Jadi, nilai dari $x + y$ adalah -1 .

4. Transpos Matriks

Dalam sebuah matriks A dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, setiap baris dari matriks

A dapat diubah menjadi kolom dan juga sebaliknya setiap kolom dari matriks A menjadi baris dari suatu matriks yang baru misalnya matriks B , maka matriks B disebut transpos dari matriks A , ditulis:

$$B = A^T$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Contoh Soal 4.5

Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. A^T

b. B^T

Jawab:

a. $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Contoh Soal 4.6

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad S = \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2}x \\ 4y & -3 \end{bmatrix}$$

Jika $R = S^T$, tentukan nilai $x + y$.

Jawab:

$$S = \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2}x \\ 4y & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow S^T = \begin{bmatrix} 5 & 4y \\ \frac{1}{2}x & -3 \end{bmatrix}$$

karena $R = S^T$ maka

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4y \\ \frac{1}{2}x & -3 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan tersebut diperoleh

$$\frac{1}{2}x = 4 \quad \text{dan} \quad 4y = 2$$

$$x = 8 \quad y = \frac{1}{2}$$

dengan demikian, $x + y = 8 + \frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$.

Jadi, nilai $x + y$ adalah $8\frac{1}{2}$.

Latihan Soal 4.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Diketahui matriks berikut.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- ordo matriks B ,
 - elemen-elemen pada kolom ke-3 matriks B ,
 - nilai dari b_{21} dan b_{34} .
2. Untuk setiap sistem persamaan linear berikut, tuliskan matriks koefisiennya.
- $$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 4x = 28 \\ 6x + 5y = -3 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - z = -17 \\ 4x + y - 3z = 6 \end{cases}$$

3. Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3p & 2 \\ 4 & -5q \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} p+8 & 2 \\ 4 & 30 \end{bmatrix}$$

Jika $A = B$, tentukan nilai $p + q$.

4. Diketahui kesamaan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ b & 2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2a & 2 & ab \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai $a + b + c$.

5. Tentukan matriks transpos dari matriks-matriks berikut.

a. $P = \begin{bmatrix} 2a & c \\ b & -d \end{bmatrix}$

c. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

b. $R = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. Diketahui

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad L = \begin{bmatrix} 3 & -2x & 2 \\ 4 & -x+y & 6 \end{bmatrix}$$

Jika $K = L^T$, tentukan nilai dari x dan y yang memenuhi persamaan tersebut.

B. Operasi Aljabar pada Matriks



Sumber: duniamusikinstrument.com

Gambar 4.2

Menggambarkan sejumlah alat musik yang akan dibeli oleh SMK A dan B di suatu toko alat musik

Pada subbab sebelumnya, telah Anda pelajari mengenai pengertian, jenis-jenis, kesamaan, dan transpos dari suatu matriks. Pelajaran selanjutnya pada subbab ini adalah operasi aljabar pada matriks. Jadi, sama seperti pada bilangan, pada matriks pun berlaku sifat-sifat operasi aljabar.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Sebagai ilustrasi awal, supaya Anda lebih memahami penjumlahan pada matriks, pelajaryliah uraian berikut.

Di sebuah kota terdapat dua SMK yang menyelenggarakan program kesenian khususnya gitar, piano, drum, dan biola. Berikut ini adalah tabel yang menyajikan jumlah alat-alat musik yang dimiliki oleh kedua sekolah tersebut.

Tabel 4.2. Jumlah alat-alat musik yang dimiliki SMK

	Gitar	Piano	Drum	Biola
SMK A	10	2	1	6
SMK B	8	3	1	9

Berdasarkan Tabel 4.2. di atas SMK A memiliki 10 gitar, 2 piano, 1 drum, dan 6 biola. SMK B memiliki 8 gitar, 3 piano, 1 drum, dan 9 biola. Dikarenakan pada tahun ajaran baru ini kedua SMK tersebut menambah daya tampung siswanya sedemikian rupa sehingga alat-alat musik yang diperlukan untuk kegiatan belajar-mengajar pun perlu ditambah. Oleh karena itu, kedua SMK tersebut melakukan pembelian alat-alat musik baru untuk melengkapi kekurangan alat-alat musik pada masing-masing SMK. Daftar jumlah pembelian alat-alat musik baru yang dibeli oleh kedua SMK tersebut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.3. Jumlah alat-alat musik yang di beli SMK

	Gitar	Piano	Drum	Biola
SMK A	5	6	3	11
SMK B	4	4	2	7

Berdasarkan tabel 4.2. diketahui bahwa SMK A membeli 10 gitar, 2 piano, 7 drum, dan 6 biola, sedangkan SMK B memiliki 4 gitar, 4 piano, 2 drum dan 7 biola.

Setelah adanya penambahan alat-alat musik tersebut, dapatkah Anda menentukan banyaknya alat-alat musik menurut jenisnya di masing-masing SMK tersebut? Dapat dipastikan Anda dapat menjawab pertanyaan tersebut karena Anda hanya tinggal menjumlahkan masing-masing banyaknya alat musik pada setiap SMK, menurut jenis alat musiknya. Proses penjumlahan pada kedua tabel tersebut sama dengan proses penjumlahan ataupun pengurangan pada matriks. Elemen-elemen yang dijumlahkan ataupun dikurangkan harus sejenis dan pada sumber yang sama (misalnya, banyaknya gitar pada SMK A pasti ditambahkan dengan banyak gitar yang dibeli oleh SMK A).

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila ordo dari kedua matriks tersebut sama. Operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak).

Jika kedua data pada tabel Anda ubah ke dalam bentuk matriks, Anda akan memperoleh matriks A dan B berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika matriks A dan matriks B dijumlahkan, diperoleh

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10+5 & 2+6 & 1+3 & 6+11 \\ 8+4 & 3+4 & 1+2 & 9+7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 8 & 4 & 17 \\ 12 & 7 & 3 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dan jika matriks A dikurangi matriks B, diperoleh

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10-5 & 2-6 & 1-3 & 6-11 \\ 8-4 & 3-4 & 1-2 & 9-7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh Soal 4.7

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- $A + C$
- $B - D$

Tugas 4.2

Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Hitung:

- $(A + B)$
- $(B + A)$
- $(A - B)$
- $(B - A)$
- $(B + C)$
- $(A + B) + C$
- $A + (B + C)$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

c. $A + B$

d. $D - A$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } A + C &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5+(-3) & 1+4 \\ -2+2 & 0+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } B - D &= \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-3 & -5-2 & 1-0 \\ 2-(-3) & -2-1 & -3-7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 5 & -3 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c. Pada matriks A dan matriks B tidak dapat dilakukan operasi penjumlahan karena ordo matriks A tidak sama dengan ordo matriks B .

d. Pada matriks D dan matriks A tidak dapat dilakukan operasi pengurangan karena ordo matriks D tidak sama dengan ordo matriks A .

Tugas 4.3

Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$p = 2$ dan $q = 3$

Hitung:

a. $(p + q)A$ dan $pA + qA$

b. $p(A + B)$ dan $pA + pB$

c. $p(qA)$ dan $(pq)A$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

2. Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika A adalah suatu matriks dan k adalah bilangan riil maka kA adalah matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen pada matriks A . Supaya Anda lebih memahaminya, pelajari contoh berikut dengan baik.

Contoh Soal 4.8

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $2A$

b. $3B$

c. $2(A + B)$

Jawab:

$$\text{a. } 2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) & 2(2) \\ 2(5) & 2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } 3B = 3 \cdot \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-8) & 3(3) \\ 3(7) & 3(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 9 \\ 21 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{e. } 2(A + B) = 2 \left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} -11 & 5 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 10 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Dua buah matriks A dan B dapat dikalikan, jika banyak kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B . Elemen-elemen pada matriks $A \times B$ diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B . Sebagai contoh, diberikan matriks A dan matriks B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{maka } A \times B &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Supaya Anda lebih memahami perkalian matriks, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.9

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- $P \times Q$
- $Q \times P$
- $P \times R$
- $R \times P$

Jawab:

$$\text{a. } P \times Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 & 4+6 \\ -12-5 & -8+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } Q \times P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-8 & 9+10 \\ -2-8 & -3+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 19 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } P \times R &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 0-6 & -2-9 \\ -4+20 & 0-10 & 4-15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -6 & -11 \\ 16 & -10 & -11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Hasil kali matriks R dan matriks P tidak ada karena banyak kolom pada matriks R tidak sama dengan banyak baris pada matriks P .

Tugas 4.4

Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Hitung:

- AB , BA , dan BC
- $(AB)C$ dan $A(BC)$
- $(B+C)$ dan AC
- $A(B+C)$ dan $(BA+CA)$
- $(B+C)A$ dan $(BA+CA)$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

4. Perpangkatan Matriks Persegi

Sifat perpangkatan pada matriks, sama halnya seperti sifat perpangkatan pada bilangan-bilangan, untuk setiap a bilangan riil, berlaku

$$a^2 = a \times a$$

$$a^3 = a \times a \times a$$

$\vdots$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}$$

Pada matriks pun berlaku hal yang sama untuk setiap matriks persegi A berlaku

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

$\vdots$

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{\text{sebanyak } n \text{ matriks}}$$

Supaya Anda memahami materi perpangkatan matriks, pelajari contoh soal berikut.

Solusi

Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Matriks}$$

$5A - B^2$ adalah....

a. $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 21 & 4 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$5A - B^2$$

$$5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$$

Jawaban: **c**

Sumber: UN SMK 2004

Contoh Soal 4.10

Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. A^2 dan A^3

b. $3A^2 - 2A^3$

Jawab:

a. $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

b. $3A^2 - 2A^3 = 3 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -9 \\ -18 & 10 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 4.11

Diketahui matriks-matriks

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai-nilai w , x , y , dan z sedemikian rupa hingga dipenuhi persamaan $2P^2 = Q$.

Jawab:

$$2P^2 = Q$$

$$2P \times P = Q$$

$$2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan elemen-elemen seletak pada kedua matriks, maka diperoleh

$$-w = 8 \Leftrightarrow w = -8$$

$$2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$y = 0$$

$$-3z = 4 \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3}$$

Jadi, nilai w , x , y , dan z yang memenuhi persamaan $2P^2 = Q$ berturut-turut adalah -8 , 1 , 0 , dan $-\frac{4}{3}$.

Latihan Soal 4.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Carilah hasil operasi matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c. $2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Jika $2 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 22 \end{bmatrix}$, tentukan nilai k .

3. Carilah matriks P yang memenuhi persamaan

$$2 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + 3P = 4 \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

4. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- a. $A + B$
- b. $2A - 3B$
- c. $AB + AC$
- d. $A(B + C)$

5. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- a. $2X + Y$
- b. $X^3 + 2XY$

C. Determinan dan Invers Matriks

1. Determinan

Pada Subbab A Anda telah dikenalkan pada matriks persegi, yaitu matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Pada bagian ini, Anda akan dikenalkan pada determinan dari suatu matriks persegi.

a. Determinan Matriks 2×2

Misalkan A adalah matriks persegi ordo 2×2 berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks A didefinisikan sebagai selisih antara hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder.

Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $\det A$ atau $|A|$. Berdasarkan definisi determinan, diperoleh determinan dari matriks A sebagai berikut.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (b \times c) = ad - bc$$

diagonal sekunder
diagonal utama

Info Math

Seki Kowa atau Seki Takakazu (1637–1708) adalah seorang matematikawan dari Jepang yang menciptakan sistem notasi baru matematika yang digunakan di banyak teorema dan teori. Sumbangan terkenal dari Seki pada aljabar adalah menemukan determinan. Beliau hanya dapat menyelesaikan matriks ordo 2×2 dan 3×3 , dan gagal untuk ordo yang lebih tinggi. Akan tetapi, muridnya, yaitu Laplace berhasil menyelesaikan unsur untuk matriks ordo yang lebih tinggi yang digunakan untuk mengeliminasi variabel pada sistem persamaan.

Sumber: en.wikipedia.org

Contoh Soal 4.12

Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4 \times (-1)) - (-3 \times 2) = 4 + 6 = 10$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = (4 \times (-4)) - (-7 \times 2) = -16 + 14 = -2$$

Contoh Soal 4.13

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 4 & 2x \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Jika $\det A = \det B$, tentukan nilai-nilai x yang memenuhi persamaan tersebut.

Jawab:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 5 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = (2x)(x) - 4(5) = 2x^2 - 20$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 8(4) - (-4)(-4) = 16$$

Karena $\det A = \det B$ maka

$$2x^2 - 20 = 16$$

$$2x^2 = 32$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

Jadi, nilai-nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah -4 dan 4 .

b. Determinan Matriks 3×3

Misalkan, A matriks persegi berordo 3×3 berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai determinan dari matriks A yang berordo 3×3 , digunakan Metode Sarrus. Adapun langkah-langkah Metode Sarrus adalah sebagai berikut.

- 1) Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua dari matriks A kemudian diletakkan di sebelah kanan tanda determinan.
- 2) Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_1 .

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$D_1 = (a)(e)(i) + (b)(f)(g) + (c)(d)(h)$$

- 3) Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_2 .

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$D_2 = (g)(e)(c) + (h)(f)(a) + (i)(d)(b)$$

- 4) Determinan dari matriks A adalah pengurangan D_1 oleh D_2 , maka $\det A = D_1 - D_2$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$= (a)(e)(i) + (b)(f)(g) + (c)(d)(h) - (g)(e)(c) - (h)(f)(a) - (i)(d)(b)$$

$$= D_1 - D_2$$

Berdasarkan nilai diskriminannya suatu matriks dibedakan menjadi 2 jenis yaitu matriks **singular** dan matriks non singular. Matriks singular adalah matriks yang determinannya nol, sedangkan matriks non **singular** adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan nol.



Determinan dari matriks

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ adalah ...}$$

- a. -22
- b. -12
- c. -2
- d. 2
- e. 12

Jawab:

Gunakan aturan Sarrus

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

+ + +

$$= (5)(1)(0) + (3)(-2)(2) + (0)(0)(-1) - (2)(1)(0) - (-1)(-2)(5) - (0)(0)(3) = -22$$

Jawaban: **a**

Sumber: UN SMK 2007

Contoh Soal 4.14

Tentukan nilai determinan dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [(-1 \times -3) - (2 \times 4)] - 5[(4 \times 2) - (0 \times -3)] \\ &= [3 - 8] - 5[8 - 0] \\ &= -5 - 40 \\ &= -45 \end{aligned}$$

Tugas 4.5

Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Hitung:

- AB dan BA
- A^{-1} dan B^{-1}
- $(AB)^{-1}$ dan $(BA)^{-1}$
- $A^{-1}B^{-1}$
- $B^{-1}A^{-1}$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

2. Invers Matriks

Pada aljabar bilangan, Anda telah mengenal bahwa jika suatu bilangan dioperasikan dengan invers perkaliannya maka akan diperoleh unsur identitas. Begitu pula dalam matriks, jika suatu matriks dikalikan dengan inversnya maka akan diperoleh matriks identitas. Supaya Anda lebih memahami pernyataan tersebut, pelajari ilustrasi berikut.

Misalkan, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-8 & -6+6 \\ 12-12 & -8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena perkalian antara matriks A dan matriks B menghasilkan matriks identitas maka dapat Anda simpulkan bahwa matriks A dan matriks B saling invers. Hal ini berarti matriks B merupakan matriks invers dari matriks A (ditulis $B = A^{-1}$) atau matriks A merupakan matriks invers dari matriks B (ditulis $A = B^{-1}$). Dengan demikian Anda dapat menyatakan sebagai berikut: Jika A dan B dua matriks persegi yang berordo sama dan memenuhi persamaan $AB = BA = I$ maka matriks A adalah matriks invers dari B atau matriks B adalah matriks invers dari matriks A .

Contoh Soal 4.15

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } K = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawablah pertanyaan berikut ini.

- Apakah matriks H merupakan matriks invers dari matriks G ?
- Apakah matriks K merupakan matriks invers dari matriks G ?

Jawab:

- Matriks H merupakan matriks invers dari matriks G jika memenuhi persamaan $GH = I$.

$$GH = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-7 & -2+2 \\ 28-28 & -7+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Karena $GH = I$, maka matriks H merupakan invers dari matriks G .

- b. Matriks K merupakan matriks invers dari matriks G , jika memenuhi persamaan $GK = I$.

$$GK = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+7 & 2+2 \\ 28+28 & 7+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 56 & 15 \end{bmatrix} \neq I$$

Karena $GK \neq I$ maka matriks K bukan invers dari matriks G .

Sebelum Anda mempelajari invers matriks lebih lanjut ada konsep yang terlebih dahulu harus Anda pahami yaitu bagaimana cara menentukan invers dari suatu matriks.

a. Adjoin Matriks Berordo 2×2

Adjoin dari matriks berordo 2×2 diperoleh dengan cara menukar elemen pada diagonal utama dan elemen pada diagonal sekunder dikalikan dengan (-1) .

Misalkan, jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka adjoin $A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Contoh Soal 4.16

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan adjoin dari matriks A .

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ maka adjoin } A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Jadi, adjoin matriks A adalah $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

b. Minor, Kofaktor, dan Adjoin matriks

1) Minor

Misalkan matriks A berordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Jika baris ke-1 dan kolom ke-2 dari matriks tersebut dihilangkan maka akan diperoleh matriks baru dengan ordo 2×2 , determinan dari matriksnya dinamakan minor. Karena kita menghilangkan baris kesatu dan kolom kedua maka minor tersebut dinamakan minor dari baris ke-1 kolom ke-2 yang dilambangkan oleh M_{12} . Dari matriks A di atas maka minor-minor dari matriks tersebut adalah

- Minor dari baris ke-1 kolom ke-1 adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$
- Minor dari baris ke-2 kolom ke-1 adalah $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}$
- Minor dari baris ke-3 kolom ke-1 adalah $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$
- Minor dari baris ke-1 kolom ke-2 adalah $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$

- Minor dari baris ke-2 kolom ke-2 adalah $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}$
- Minor dari baris ke-3 kolom ke-2 adalah $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}$
- Minor dari baris ke-1 kolom ke-3 adalah $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}$
- Minor dari baris ke-2 kolom ke-3 adalah $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12}$
- Minor dari baris ke-3 kolom ke-3 adalah $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

Diperoleh matriks minor dari matriks A adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

2) Kofaktor

Jika M_{ij} merupakan minor ke- ij dari matriks A maka kofaktor adalah hasil perkalian elemen minor M_{ij} dengan $(-1)^{i+j}$. Dengan demikian, $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Sehingga diperoleh matriks *kofaktor* dari matriks A adalah

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

3) Adjoin Matriks

Jika kofaktor dari matriks A tersebut di transposkan, maka didapat matriks baru yang disebut sebagai Adjoin A . Ditulis:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 4.17

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan:

- minor matriks A ,
- kofaktor matriks A ,
- adjoin A .

Jawab:

- Menentukan minor.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

Berdasarkan nilai-nilai minor di atas maka matriks minornya adalah

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -13 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Menentukan matriks kofaktor.

$$K_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot (-3) = -3$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot (-5) = -5$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)(-1) = 1$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-13) = -13$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot 5 = -5$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1 \cdot (-5) = -5$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot (-5) = 5$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 1 \cdot 5 = 5$$

Sehingga, matriks kofaktor A adalah $\begin{bmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & -13 & -5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

c. Menentukan adjoin.

Adjoin merupakan transpos dari matriks kofaktor sehingga diperoleh.

$$\text{Adjoin } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -1 & -13 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

c. Invers Matriks Berordo 2×2

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ merupakan matriks yang memiliki invers yaitu matriks

yang memiliki nilai determinan tidak nol (matriks ini disebut matriks non-singular) maka invers dari A yaitu A^{-1} dinyatakan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ Adjoin } A$$

Contoh Soal 4.18

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -11 & -3 \end{bmatrix}$, tentukan invers dari matriks A .

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -11 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -11 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 11 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -4 \end{bmatrix}$$

Jadi, invers dari matriks A adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -4 \end{bmatrix}$.

Catatan

A^{-1} terdefinisi jika $\det A \neq 0$ artinya matriks A memiliki invers jika matriks A memiliki determinan yang tidak sama dengan nol.

Contoh Soal 4.19

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers dari matriks-matriks tersebut jika ada.

Jawab:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Periksa nilai determinan dan matriks P

$$\det P = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1$$

karena $\det P \neq 0$ maka **matriks P memiliki invers**

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{Adjoin } P = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad Q = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Periksa nilai determinan dari matriks Q

$$\det Q = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$

Karena $\det Q = 0$ maka **matriks Q tidak memiliki invers**.

d. Invers Matriks Berordo 3×3

Misalkan, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ merupakan matriks yang memiliki invers,

dengan $\det A \neq 0$ maka invers dari A , yaitu A^{-1} dinyatakan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A$$

Contoh Soal 4.20

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 3 - 18 + 2 - 2 = -20$$

Berdasarkan Contoh Soal 4.17 diperoleh

$$\text{Adjoin } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -13 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -13 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & \frac{13}{20} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, invers matriks } A \text{ adalah } \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & \frac{13}{20} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 4.21

Diketahui matriks-matriks

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- $R^{-1}S$
- $(RS)^{-1}$

Anda Pasti Bisa

Jika

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka $(A \cdot B^{-1})^{-1} = \dots$

- $\begin{bmatrix} 7 & 23 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 23 & 13 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$

Sumber: UMPTN, 1999

Jawab:

a. $R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka $R^{-1} = \frac{1}{\det R} \text{Adjoin } R = \frac{1}{-1-0} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$R^{-1}S = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\text{Jadi, } R^{-1}S = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. $RS = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$(RS)^{-1} = \frac{1}{0-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$
$$\text{Jadi, } (RS)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Latihan Soal 4.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -2 & -8 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. Tentukan apakah matriks-matriks berikut memiliki invers.

a. $P = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$

c. $R = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$

d. $S = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & 6 \\ -3 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

3. Diketahui $P = \begin{bmatrix} -11 & -8 \\ 2-x & 6 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

Jika $\det P = \det Q$, tentukan nilai x .

4. Tentukan minor dan kofaktor dari matriks-matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. Tentukan invers dari matriks-matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -9 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- a. AB^{-1}
b. $(AB)^{-1}$

D. Aplikasi Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Pada Bab III Anda telah mempelajari metode penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan metode substitusi eliminasi. Pada subbab ini, Anda akan mempelajari metode lain dengan menggunakan matriks. Namun sebelumnya, Anda akan diperkenalkan dahulu bagaimana menyelesaikan persamaan $AX = B$ dan $XA = B$.

1. Penyelesaian Persamaan Matriks $AX = B$ dan $XA = B$

Dalam menyelesaikan persamaan matriks $AX = B$ dan $XA = B$, digunakan konsep invers matriks yang telah Anda pelajari pada **Subbab C**. Dalam hal ini konsep yang Anda gunakan adalah $A^{-1}A = I = AA^{-1} = I$

Jika A dan B merupakan matriks berordo sama, dengan A matriks non singular bagaimanakah cara mencari matriks X yang memenuhi persamaan $AX = B$ dan $XA = B$. Untuk mengetahuinya, pelajailah uraian berikut dengan baik.

a. Persamaan $AX = B$

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad (\text{kedua ruas dikalikan dengan invers matriks } A \text{ dari kiri})$$

$$IX = A^{-1}B \quad (AA^{-1} = I)$$

$$X = BA^{-1} \quad (IX = X)$$

Jadi, persamaan $AX = B$ dapat diselesaikan dengan $X = A^{-1}B$

b. Persamaan $XA = B$

$$XA = B$$

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \quad (\text{kedua ruas dikalikan dengan invers matriks } A \text{ dari kanan})$$

$$XI = BA^{-1} \quad (AA^{-1} = I)$$

$$X = BA^{-1} \quad (XI = X)$$

Jadi, persamaan $XA = B$ dapat diselesaikan dengan $X = BA^{-1}$

Supaya Anda lebih memahami maksudnya, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.22

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan matriks X yang memenuhi persamaan

a. $AX = B$

b. $XA = B$

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } \det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5(1) - 4(1) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

a. $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

b. $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$



Matriks X berordo (2×2) yang memenuhi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah

a. $\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\text{Misal, } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \text{ maka } X = A^{-1}B$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Jawaban: a

Sumber: UAN 2005

2. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks

Salah satu metode dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel adalah dengan menggunakan invers matriks. Perhatikan bentuk umum dari SPL berikut:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Bentuk di atas dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks koefisien dengan variabelnya, yaitu:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ dengan } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ merupakan matriks koefisien.}$$

Berikut adalah langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan invers matriks.

- Nyatakan sistem persamaan linear tersebut ke dalam bentuk matriks.
- Tentukan matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut.
- Tentukan invers dari matriks koefisien.
- Gunakan konsep persamaan $AX = B$ atau $XA = B$.

Supaya Anda memahami langkah-langkah tersebut, perhatikan contoh soal berikut.

Solusi

Jika $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

maka $x + 2y = \dots$

- 6
- 5
- 4
- 3
- 2

Jawab:

Misal,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } x + y = 2 + 2 = 4$$

Jawaban: c

Sumber: UAN 2003

Contoh Soal 4.23

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers matriks.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Jawab:

Langkah 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ misal } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ dan } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Langkah 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka } \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Langkah 3

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

diperoleh $x = 1$ dan $y = 2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 2)\}$.

Contoh Soal 4.24

Zoel dan Ade pergi ke kios pulsa. Zoel membeli 3 buah kartu perdana A dan 2 buah kartu perdana B. Untuk itu Zoel harus membayar Rp53.000,00. Ade membeli 2 buah kartu perdana A dan sebuah kartu perdana B, untuk itu Ade harus membayar Rp32.500,00. Misalkan, harga sebuah kartu perdana

A adalah x rupiah dan harga sebuah kartu perdana B adalah y rupiah.
 Tentukan penyelesaian dari masalah tersebut.

Jawab:

Buatlah Tabel untuk masalah tersebut

	Kartu Perdana A	Kartu Perdana B	Jumlah
Zoel	3	2	53.000
Ade	2	1	32.500

Harga sebuah kartu perdana A adalah x rupiah

Harga sebuah kartu perdana B adalah y rupiah

Sistem persamaan linear dari masalah tersebut adalah

$$\begin{cases} 3x + 2y = 53.000 \\ 2x + y = 32.500 \end{cases}$$

Bentuk matriks dari sistem persamaan linear tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53.000 \\ 32.500 \end{bmatrix}$$

A
 X
 B

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53.000 \\ 32.500 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -53.500 + 65.000 \\ 106.000 - 97.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.000 \\ 8.500 \end{bmatrix}$$

Diperoleh, $x = 12.000$ dan $y = 8.500$.

Jadi, harga sebuah kartu perdana A adalah Rp12.000,00 dan harga kartu perdana B adalah Rp8.500,00.

3. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Aturan Cramer

Determinan yang telah Anda pelajari di **Subbab C**, selain digunakan mencari invers dari suatu matriks, dapat pula digunakan dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sistem persamaan linear tersebut jika diselesaikan akan diperoleh nilai-nilai x dan y sebagai berikut.

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Bentuk-bentuk $(c_1b_2 - c_2b_1)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$ dan $(a_1c_2 - a_2c_1)$ jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut.

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Dengan demikian nilai x dan nilai y jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

atau

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}$$

dengan:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ yaitu determinan dari matriks koefisien } x \text{ dan } y.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ yaitu determinan dari matriks koefisien } x \text{ dan } y \text{ yang kolom pertamanya diganti oleh konstanta } c_1 \text{ dan } c_2.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ yaitu determinan dari matriks koefisien } x \text{ dan } y \text{ yang kolom keduanya diganti oleh konstanta } c_1 \text{ dan } c_2.$$

Berdasarkan uraian tersebut maka diperoleh kesimpulan berikut:

Jika diberikan sistem persamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}, \text{ dengan } D \neq 0$$

dimana

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ dan } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Anda Pasti Bisa

Dengan menggunakan metode determinan. Tentukan

$$\text{nilai } x - y \text{ jika } \begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

Sumber: UMPTN 1999

Contoh Soal 4.25

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear pada Contoh Soal 4.23 dan Contoh Soal 4.24 dengan menggunakan Aturan Cramer.

Jawab:

Dari **Contoh Soal 4.23** diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x - 2y = 3 \end{cases}$$

Tentukan terlebih dahulu nilai D , D_x , dan D_y .

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 - (-9) = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Dengan demikian diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 2)\}$.

Dari Contoh Soal 4.24 diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 53.000 \\ 2x + y = 32.500 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 53.000 & 2 \\ 32.500 & 1 \end{vmatrix} = 53.000 - 65.000 = -12.000$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 53.000 \\ 2 & 32.500 \end{vmatrix} = 97.500 - 106.000 = -8.500$$

Dengan demikian, diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12.000}{-1} = 12.000$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8.500}{-1} = 8.500$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(12.000, 8.500)\}$.

Latihan Soal 4.4

Kerjakanlah soal-soal berikut.

- Jika P matriks berordo 2×2 , tentukan matriks P yang memenuhi
 - $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$
 - $P \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 15 & -26 \end{bmatrix}$
- Jika p dan q memenuhi persamaan

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \end{bmatrix}$$
 Tentukan nilai-nilai dari
 - $(p + q)^2$
 - $2p^2 + pq$
- Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers matriks.
 - $\begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 2x - 5y = -5 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$
- Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.
 - $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} -7x + 5y = -3 \\ \frac{7}{2}x - 4y = -6 \end{cases}$

5. Pak Heru bekerja selama 5 hari dengan 3 hari diantaranya lembur, untuk itu ia mendapat upah Rp285.000,00. Pak Heri bekerja selama 4 hari dan selama 4 hari tersebut ia lembur, untuk itu ia

mendapat upah Rp260.000,00. Jika Pak Heru, Pak Heri, dan Pak Willi bekerja pada perusahaan yang sama, berapakah upah yang diperoleh Pak Willi jika bekerja selama 5 hari dan 2 hari diantaranya lembur?

Rangkuman

1. Matriks merupakan kumpulan bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom sedemikian sehingga tampak seperti bentuk sebuah persegi panjang.
2. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka matriks berordo $m \times n$ dan ditulis $A_{m \times n}$.
3. Dua matriks dikatakan sama jika ordo yang dimiliki keduanya sama dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.
4. Transpos dari matriks A adalah matriks baru yang disusun dengan cara mengubah setiap baris menjadi kolom juga sebaliknya setiap kolom menjadi baris.
5. Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila ordo dari kedua matriks tersebut sama. Penjumlahan dan pengurangan pada matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak).
6. Jika A adalah suatu matriks dan k adalah bilangan riil maka kA adalah suatu matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen pada matriks A .
7. Perkalian matriks A dan matriks B diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B .
8. Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

9. Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

10. Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka invers dari A , yaitu A^{-1}

dinyatakan dengan $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

11. Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka invers dari A , yaitu A^{-1}

dinyatakan dengan $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A$.

12. Invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan menggunakan konsep $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ atau $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ jika A mempunyai invers.

13. Penyelesaian persamaan linear dua variabel dengan Aturan Cramer.

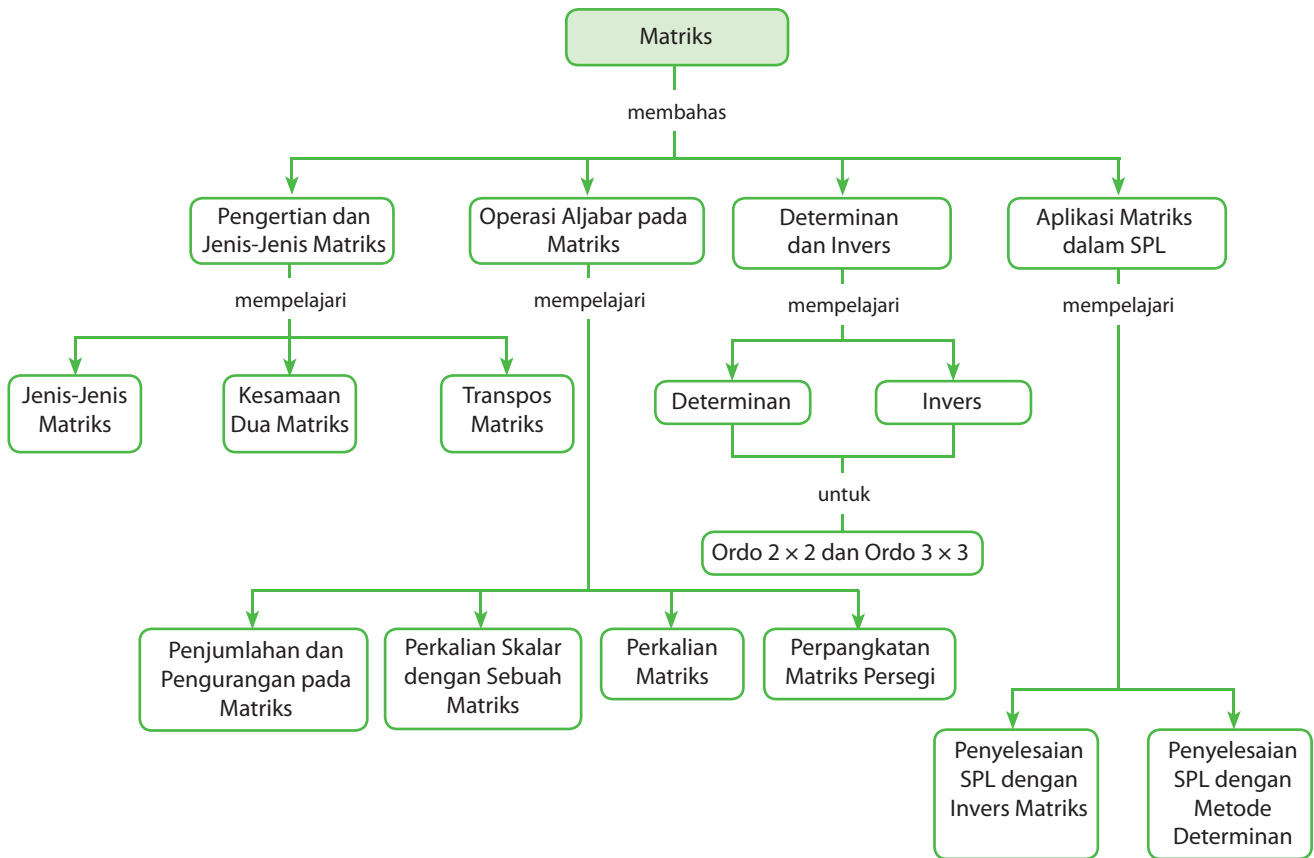
$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}, D \neq 0$$

dimana $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ dan } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Alur Pembahasan

Perhatikan alur pembahasan berikut:

Materi tentang Matriks dapat digambarkan sebagai berikut.



Kata Mutiara

Sai Baba

Ada dua hal yang harus Anda lupakan: kebaikan yang Anda lakukan kepada orang lain dan kesalahan orang lain kepada Anda

Latihan Soal Bab 4

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Diketahui matriks $H = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

Matriks H merupakan matriks, *kecuali*

- a. Matriks skalar d. Matriks persegi
b. Matriks diagonal e. Matriks ordo 2×2
c. Matriks identitas

Alasan: _____

2. Transpos dari matriks $M = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah

- a. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

3. Jika $Y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ dan $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $Y + Z = \dots$

- a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

4. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} x & -2y \\ \frac{1}{2}z & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Jika $2A = B^T$, maka nilai x , y , dan z berturut-turut adalah

- a. $4, -\frac{1}{2}, 4$ d. $-4, \frac{1}{2}, -4$
b. $-4, -\frac{1}{2}, 4$ e. $-4, -\frac{1}{2}, -4$
c. $-4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$

Alasan: _____

5. Jika $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka $BC = \dots$

- a. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

6. Jika $F = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka $F^2 = \dots$

- a. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

7. Jika $R = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ maka $|R| = \dots$

- a. 26 d. -6
b. -26 e. -16
c. 6

Alasan: _____

8. Jika $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} = 2$ maka nilai $x = \dots$

- a. 2 d. 4
b. -2 e. 1
c. 2 atau -2

Alasan: _____

9. Jika P (ordo 2×3) dikalikan dengan Q (ordo 3×5) maka dihasilkan R yang berordo

- a. 3×2 d. 2×5
b. 5×3 e. 5×2
c. 3×5

Alasan: _____

10. Matriks X yang memenuhi $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ adalah

- a. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

11. Jika $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -11 \end{bmatrix}$ maka nilai x dan y berturut-turut adalah

- a. 4 dan 11 d. 11 dan -4
b. -4 dan 11 e. -4 dan -11
c. -11 dan -4

Alasan: _____

12. Nilai x dan y yang memenuhi persamaan $\begin{bmatrix} -2x & 5 \\ -2 & y \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} y & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ adalah

- a. $x = 2$ dan $y = -3$ d. $x = -3$ dan $y = 4$
b. $x = 3$ dan $y = -4$ e. $x = 2$ dan $y = -4$
c. $x = -2$ dan $y = 3$

Alasan: _____

13. Invers dari matriks $Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ adalah

- a. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

14. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 2 \\ x+4 & 2 \end{bmatrix}$ tidak memiliki invers maka nilai x adalah

- a. 2 d. -5
b. -2 e. 3
c. 5

Alasan: _____

15. Nilai a yang memenuhi persamaan $\begin{vmatrix} 3a & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ adalah

- a. 2 d. -2
b. 1 e. -3
c. -1

Alasan: _____

16. Jika $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} \cdot B^{-1} =$

- a. $\begin{bmatrix} -9 & 13 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -9 & -13 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 9 & -13 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} -9 & 13 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ -8 & -11 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

17. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan I matriks satuan ordo dua maka $A^2 - 2A + I =$

- a. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Alasan: _____

18. Nilai a yang memenuhi $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & b \\ a+2b & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}$ adalah

- a. 1 d. 4
b. 2 e. 5
c. 3

Alasan: _____

19. Matriks $\begin{bmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{bmatrix}$ tidak mempunyai invers bila

- a. a dan b sebarang
b. $a \neq 0, b \neq 0$, dan $a = b$
c. $a \neq 0, b \neq 0$, dan $a = -b$
d. $a = 0$ dan b sebarang
e. $b = 0$ dan a sebarang

Alasan: _____

20. Jika matriks B adalah invers dari matriks A dan $AC = B$ maka $C =$

- a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. B^2
b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e. AB
c. A^2

Alasan: _____

B. Jawablah soal-soal berikut.

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan:
- BC
 - $A^T (A + B)$
 - CA
2. Jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $f(x) = x^2$. Tentukan $f(A)$.
3. Tentukan invers dari matriks-matriks berikut:
- $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & -9 & 11 \end{bmatrix}$
4. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan nilai $A \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$.
5. Diketahui, matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan nilai k yang memenuhi $\det P^T = k \det P^{-1}$.