AZZAM LABIB HAKIM Pak Budi Senin, 15 oktober 2018

BAB IV
KEKONGRUENEN

4.2 Kekongruenan

Konsep kekogruenan pada bilangan bulat dikembangkan berdasarkan konsep Algoritma Pembagian.

Definisi 4.2.1. *Diberikan bilangan bulat a, b dan m dengan $m \neq 0$. Bilangan a dan b dikatakan* ***kongruen modulo*** *m jika m membagi $a-b$, dinotasikan dengan $a \equiv b \pmod{m}$. Jika m tidak membagi $a-b$, maka bilangan a dan b dikatakan tidak kongruen modulo m dan dinotasikan $a \not\equiv b \pmod{m}$.*

Relasi "$\equiv$" pada definisi tersebut dinamakan relasi kongruensi. Beberapa karakteristik dasar terkait dengan kekongruenan diberikan sebagai berikut.

Teorema 4.2.2. *Diberikan bilangan bulat a, b, c, d dan m.*

a. $a \equiv a \pmod{m}$.

b. *Jika* $a \equiv b \pmod{m}$ *dan* $b \equiv c \pmod{m}$, *maka* $a \equiv c \pmod{m}$.

c. $a \equiv b \pmod{m}$, *maka* $b \equiv a \pmod{m}$.

d. *Jika* $a \equiv b \pmod{m}$ *dan* $c \equiv d \pmod{m}$, *maka* $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ *dan* $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

e. *Jika* $a \equiv b \pmod{m}$, *maka untuk setiap bilangan bulat k berlaku* $ka \equiv kb \pmod{m}$.

f. *Jika* $a \equiv b \pmod{m}$ *dan* $c \equiv d \pmod{m}$, *maka* $ac \equiv bd \pmod{m}$. *Secara umum, jika* $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, \ldots, k$, *maka* $a_1 \ldots a_k \equiv b_1 \ldots b_k \pmod{m}$. *Lebih lanjut, jika* $a \equiv b \pmod{m}$, *maka untuk setiap bilangan bulat positif k berlaku* $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

g. $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$ *jika dan hanya jika*

$$a \equiv b \pmod{\mathrm{lcm}(m_1, \ldots, m_k)}.$$

Secara khusus, jika $m_1, \ldots, m_k$ sepasang-sepasang relatif prima, maka $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$ *jika dan hanya jika* $a \equiv b \pmod{m_1 \ldots m_k}$.

Contoh 4.2.3. *Tentukan sisa pembagian 6^{2013} oleh 37.*

Penyelesaian. Diperhatikan bahwa 36 $=\equiv -1 \pmod 7$, maka diperoleh

$$6^{2013} \equiv 6.6^{2012} \equiv 6.(6^2)^{1006} \equiv 6.(-1)^{1006} \equiv 1 \pmod{37}.$$

Jadi, sisa pembagian 6^{2013} oleh 37 adalah 6. □

Contoh 4.2.4. *Tentukan dua digit terakhir dari 3^{2013}.*

Penyelesaian. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 3^{2013} &= (3^5)^{402}3^3 = (243)^{402}27 \\ &\equiv 43^{402}27 \\ &\equiv (1849)^{201}27 \\ &\equiv (49)^{201}27 \\ &\equiv (2401)^{100}49.27 \\ &\equiv (1)^{100}1323 \\ &\equiv 23 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Jadi, dua digit terakhir dari 3^{2013} adalah 23. □

Contoh 4.2.5. *Tunjukkan bahwa 7 habis membagi $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ untuk setiap bilangan bulat positif n.*

Penyelesaian. Diambil sebarang bilangan bulat positif n. Diperhatikan bahwa $3^{2n+1} \equiv 3.9^n \equiv 3.2^n \pmod 7$ dan $2^{n+2} \equiv 4.2^n \pmod 7$. Akibatnya

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7.2^n \equiv 0 \pmod 7.$$

□

Teorema 4.2.6. *Diberikan bilangan bulat a, b dan $n, n \neq 0$ dengan sifat $a = nq_1 + r_1, b = nq_2 + r_2$, $0 \leq r_1, r_2 < |n|$. $a \equiv b \pmod n$ jika dan hanya jika $r_1 = r_2$.*

Bukti. Diperhatikan bahwa $a-b = n(q_1-q_2)+(r_1-r_2)$, maka diperoleh $n|(a-b)$ jika dan hanya jika $n|(r_1-r_2)$. Karena $|r_1-r_2| < |n|$. maka diperoleh $n|(a-b)$ jika dan hanya jika $r_1 = r_2$. ■

Diperhatikan bahwa Teorema ?? dapat dinyatakan dalam konsep kekongruenan sebagai berikut.

Akibat 4.2.7. *Diberikan bilangan prima p. Jika x dan y bilangan bulat dengan sifat $xy \equiv 0 \pmod{p}$, maka $x \equiv 0 \pmod{p}$ atau $y \equiv 0 \pmod{p}$.*

Hal ini merupakan salah satu contoh kesamaan yang terdapat dalam beberapa konsep teori bilangan: $p|xy$ (notasi keterbagian), $xy \equiv 0 \pmod{p}$ (notasi kekongruenan) dan $p = kxy$ (notasi persamaan Diophantine). Beberapa aplikasi dari Teorema 3.3.3 dan Teorema 3.3.4 diberikan sebagai berikut.

Akibat 4.2.8. *Diberikan bilangan bulat positif m dan bilangan bulat a, b dan c dengan $c \neq 0$. Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$, maka*

$$a \equiv b \pmod{\frac{m}{\gcd(c,m)}}.$$

Akibat 4.2.9. *Diberikan bilangan bulat positif m dan a bilangan bulat yang relatif prima dengan m. Jika a_1 dan a_2 bilangan bulat dengan sifat $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$, maka $a_1a \equiv a_2a \pmod{m}$.*

Contoh 4.2.10. *Tentukan semua bilangan prima p dan q dengan sifat $p+q = (p-q)^3$.*

Penyelesaian. Misalkan bilangan prima p dan q memenuhi $p+q = (p-q)^3$. Diperhatikan bahwa $(p-q)^3 = p+q \neq 0$. diperoleh $p \neq q$ yang berarti p dan q relatif prima. Karena $p-q \equiv 2p \pmod{p+q}$, maka diperoleh $0 \equiv 8p^3 \pmod{p+q}$. Karena p dan q relatif prima, maka p dan $p+q$ relatif prima, sehingga diperoleh $0 \equiv 8 \pmod{p+q}$. Artinya $p+q|8$. Dapat dicek bahwa bilangan prima (p,q) yang memenuhi hanya $(3,5)$ atau $(5,3)$. □

Berikut diberikan sifat yang bermanfaat dalam menyederhanakan bentuk pangkat pada relasi kongruensi.

Teorema 4.2.11. *Diberikan bilangan bulat m. a dan b dengan a dan b relatif prima terhadap m. Jika x dan y bilangan bulat positif dengan sifat*

$$a^x \equiv b^x \pmod{m} \quad \text{dan} \quad a^y \equiv b^y \pmod{m},$$

maka

$$a^{\gcd(x,y)} \equiv b^{\gcd(x,y)} \pmod{m}.$$

Bukti. Berdasarkan Identitas Bézout, terdapat bilangan bulat tak negatif u dan v dengan sifat $\gcd(x,y) = ux - vy$. Diperoleh

$$a^{ux} \equiv b^{ux} \pmod{m} \quad \text{dan} \quad a^{vy} \equiv b^{vy} \pmod{m},$$

sehingga berlaku $a^{ux}b^{vy} \equiv a^{vy}b^{ux} \mod m$. Karena $\gcd(a,m) = \gcd(m,n) = 1$, maka diperoleh

$$a^{\gcd(x,y)} \equiv a^{ux-vy} \equiv b^{ux-vy} \equiv b^{\gcd(x,y)} \pmod{m}.$$

■

4.3 Kelas Residu

Berdasarkan Teorema 4.2.2 bagian a. b. dan c., diperoleh bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif m, setiap bilangan bulat dapat diklasifikasikan secara tunggal ke dalam suatu kelas berdasarkan sisanya ketika dibagi oleh m. Jelas bahwa terdapat sebanyak m kelas.

Definisi 4.3.1. *Diberikan bilangan bulat positif n. Himpunan bilangan bulat S disebut* ***himpunan kelas residu lengkap*** *modulo n jika untuk setiap i dengan $0 \leq i \leq n-1$, terdapat $s \in S$ dengan sifat $i \equiv s \mod n$.*

Diperhatikan bahwa $\{a, a+1, a+2, \ldots, a+m-1\}$ merupakan himpunan kelas residu lengkap modulo m untuk sebarang bilangan bulat a.

Contoh 4.3.2. *Diberikan bilangan bulat positif n. Pernyataan-pernyataan dibawah ini benar.*

a. $n^2 \equiv 0$ *atau* $1 \pmod 3$*;*

b. $n^2 \equiv 0$ *atau* $\pm 1 \pmod 5$*;*

c. $n^2 \equiv 0$ *atau* 1 *atau* $4 \pmod 8$*;*

d. $n^3 \equiv 0$ *atau* $\pm 1 \pmod 9$*;*

e. $n^3 \equiv 2$ *atau* 3 *atau* $5 \pmod 7$*;*

f. $n^4 \equiv 0$ *atau* $1 \pmod{16}$*.*

Bukti diserahkan sebagai latihan.

Contoh 4.3.3. *Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi* $x^2 - 5y^2 = 2013$.

Penyelesaian. Diandaikan bilangan bulat x dan y memenuhi $x^2 - 5y^2 = 2013$. Diperhatikan bahwa $x^2 - 5y^2 \equiv 0$ atau $\pm 1 \pmod 5$. Di sisi lain, $2013 \equiv 3 \pmod 5$, suatu kontradiksi. □

Contoh 4.3.4. *Diberikan m bilangan genap positif. Diasumsikan bahwa*

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \quad \textit{dan} \quad \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

dua himpunan kelas residu lengkap modulo m. Tunjukkan bahwa

$$\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m\}$$

bukan himpunan kelas residu lengkap modulo m.

Penyelesaian. Diandaikan $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m\}$ himpunan kelas residu lengkap modulo m. Diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n &\equiv (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_m + b_m) \\ &\equiv (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_m) \\ &\equiv 2(1 + 2 + \ldots + m) \pmod m, \end{aligned}$$

sehingga $1 + 2 + \ldots + m \equiv 0 \pmod m$ atau $m \mid \frac{m(m+1)}{2}$. Kontradiksi dengan fakta bahwa untuk bilangan genap m, $m \nmid \frac{m(m+1)}{2}$. Jadi, $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m\}$ bukan himpunan kelas residu lengkap modulo m. □

Teorema 4.3.5. *Diberikan bilangan bulat positif m dan a, b bilangan bulat dengan* $\gcd(a, m) = 1$. *Jika S himpunan kelas residu lengkap modulo m, maka*

$$T = aS + b = \{as + b : s \in S\}$$

merupakan himpunan kelas residu lengkap modulo m.

Bukti. Diketahui S himpunan kelas residu lengkap modulo m. Diperoleh bahwa banyak anggota dari S ada sebanyak m. misalkan $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ dengan $s_i \not\equiv s_j$, $i \neq j$ dan untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ terdapat j dengan sifat $s_j \equiv i \mod m$. Diperhatikan bahwa $T = \{as + b : s \in S\}$, maka diperoleh banyak anggota dari T ada sebanyak m, sehingga cukup ditunjukkan setiap anggotanya tidak kongruen satu sama lain dalam modulo m. Diandaikan terdapat $as_i + b \equiv as_j + b \pmod{m}$ untuk suatu $1 \leq i < j \leq m$. Diperoleh $as_i \equiv as_j \pmod{m}$. Karena $\gcd(a, m) = 1$, maka diperoleh $s_i \equiv s_j \pmod{m}$. Kontradiksi dengan fakta $s_i \not\equiv s_j$, $i \neq j$. Jadi, T merupakan himpunan kelas residu lengkap modulo m. ■

Selanjutnya, diberikan hubungan antara kelas residu dengan persamaan kongruensi linear.

Teorema 4.3.6. *Diberikan bilangan bulat positif m. Jika a, b bilangan bulat dengan* $\gcd(a, m) = 1$, *maka terdapat bilangan bulat x dengan sifat $ax \equiv b \pmod{m}$ dan semua bilangan x yang memenuhi kondisi tersebut berada pada tepat satu kelas residu modulo m.*

Bukti. Misalkan $\{c_1, c_2 \ldots, c_m\}$ himpunan kelas residu lengkap modulo m. Berdasarkan Teorema 4.3.5,

$$\{ac_1 - b, ac_2 - b, \ldots, ac_m - b\}$$

merupakan himpunan kelas residu lengkap. Akibatnya, terdapat c_i dengan sifat $ac_i - b \equiv 0 \pmod{m}$, dengan kata lain c_i merupakan solusi persamaan kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$. Lebih lanjut, jika x dan x' solusi persamaan kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$, maka berlaku $ax \equiv ax' \pmod{m}$. Karena $\gcd(a, m) = 1$, maka diperoleh $x \equiv x' \pmod{m}$. ■

□

4.4 Teorema Kecil Fermat dan Teorema Euler

Untuk setiap bilangan bulat positif m, banyaknya bilangan bulat positif n yang kurang dari m dan relatif prima dengan m dinotasikan dengan $\varphi(n)$. Fungsi φ disebut **fungsi Euler**. Jelas bahwa $\varphi(1) = 1$ dan untuk setiap bilangan prima p, $\varphi(p) = p - 1$. Lebih lanjut, jika n bilangan bulat positif dengan sifat $\varphi(n) = n - 1$, maka n prima. Beberapa karakteristik lain dari fungsi Euler diberikan sebagai berikut.

Teorema 4.4.1. *Untuk setiap bilangan prima p dan bilangan bulat positif a berlaku $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$.*

Teorema 4.4.2. *Jika a dan b bilangan bulat positif yang relatif prima, maka $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.*

Bukti. Disusun bilangan $1, 2, \ldots, ab$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & a \\ a+1 & a+2 & \ldots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a(b-1)+1 & a(b-1)+2 & \ldots & ab. \end{array}$$

Jelas bahwa di antara bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, ab$ terdapat $\varphi(ab)$ bilangan yang relatif prima dengan ab. Di lain pihak, terdapat $\varphi(a)$ kolom yang mengandung bilangan-bilangan yang relatif prima dengan a. Karena setiap kolom merupakan himpunan kelas residu lengkap modulo b, maka terdapat tepat $\varphi(b)$ bilangan pada masing-masing kolom yang relatif prima dengan b. Akibatnya, banyaknya bilangan yang relatif prima dengan ab pada susunan tersebut adalah $\varphi(a)\varphi(b)$. Jadi, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. ■

Berdasarkan Teorema 4.4.1 dan Teorema 4.4.2 diperoleh karakteristik nilai fungsi Euler dari setiap bilangan bulat positif.

Teorema 4.4.3. *Diberikan bilangan bulat positif n. Jika $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ faktorisasi prima dari n, maka*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Contoh 4.4.4. *Tunjukkan bahwa ada tak hingga banyaknya bilangan bulat positif n dengan sifat $10|\varphi(n)$.*

Penyelesaian. Diambil $n = 11^k$, $k = 1, 2, \dots$. Diperoleh $\varphi(11^k) = 11^k - 11^{k-1} = 10.11^{k-1}$. □

Definisi 4.4.5. *Diberikan bilangan bulat positif m. Himpunan bilangan bulat S disebut* ***himpunan kelas residu tereduksi lengkap*** *modulo m jika untuk setiap $0 \le i \le n - 1$ dengan $\gcd(i, m) = 1$, terdapat $s \in S$ dengan sifat $i \equiv s \pmod{m}$.*

Jelas bahwa suatu himpunan kelas residu tereduksi lengkap modulo m memiliki sebanyak $\varphi(m)$ anggota.

Teorema 4.4.6. *Diberikan bilangan bulat positif m dan a dengan $\gcd(a, m) = 1$. Jika S himpunan kelas residu tereduksi lengkap modulo m, maka himpunan*

$$T = aS = \{as | s \in S\},$$

merupakan himpunan kelas residu tereduksi lengkap modulo m.

Diberikan bilangan bulat positif m dan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}\}$ himpunan kelas residu tereduksi lengkap modulo m. Berdasarkan eksistensi dan ketunggalan invers dalam modulo m, dapat ditunjukkan bahwa himpunan invers anggota-anggota dari S, dinotasikan dengan

$$\{a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_{\varphi(m)}^{-1}\} \quad \text{atau} \quad \left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_{\varphi(m)}}\right\},$$

merupakan himpunan kelas residu tereduksi lengkap modulo m.

Teorema 4.4.7 (Teorema Euler). *Jika a dan m bilangan bulat positif dengan $\gcd(a, m) = 1$, maka $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Bukti. Misalkan $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}\}$ himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang dari m dan relatif prima dengan m. Karena $\gcd(a, m) = 1$, maka berdasarkan Teorema 4.4.6 berlaku

$$\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\varphi(m)}\}$$

merupakan himpunan kelas residu tereduksi lengkap modulo m. Akibatnya diperoleh

$$(aa_1)(aa_2)\ldots(aa_{\varphi(m)}) \equiv a_1a_2\ldots a_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Karena $\gcd(a_k, m) = 1,\ k = 1, 2, \ldots, \varphi(m)$, maka diperoleh

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

■

Dengan mengambil m bilangan prima, maka Teorema Euler menjadi Teorema Kecil Fermat.

Teorema 4.4.8 (Teorema Kecil Fermat). *Jika a bilangan bulat positif dan p bilangan prima, maka $a^p \equiv a \pmod{p}$.*

Contoh 4.4.9. *Diberikan bilangan prima $p \geq 7$. Tunjukkan bahwa*

$$\underbrace{11\ldots1}_{(p-1)\ kali}$$

habis dibagi oleh p.

Penyelesaian. Diperhatikan bahwa

$$\underbrace{11\ldots1}_{(p-1)\ \text{kali}} = \frac{10^{p-1}-1}{9}.$$

Karena $\gcd(10, p) = 1$, maka berdasarkan Teorema Kecil Fermat diperoleh $p|10^{p-1} - 1$, sehingga

$$\underbrace{11\ldots1}_{(p-1)\ \text{kali}}$$

habis dibagi oleh p. □

Khusus untuk $b = 1$, pada Teorema 4.3.6 diperoleh bahwa jika $\gcd(a, m) = 1$, maka terdapat x dengan sifat $ax \equiv 1 \pmod{m}$. Bilangan x tersebut disebut **invers dari a modulo m**, dinotasikan dengan a^{-1} atau $\frac{1}{a} \pmod{m}$. Karena semua bilangan x yang memenuhi kondisi $ax \equiv 1 \pmod{m}$ berada pada tepat satu kelas residu modulo m, maka invers dari a modulo m terdefinisi dengan baik.

Teorema 4.3.7 (Teorema Wilson). *Untuk setiap bilangan prima p berlaku $(p-1)! = -1 \pmod{p}$.*

Bukti. Untuk kasus $p = 2$ dan $p = 3$ cukup jelas. Diambil sebarang bilangan prima $p \geq 5$. Misalkan $S = \{2, 3, \ldots, p-2\}$. Karena p prima, maka untuk sebarang $s \in S$ memiliki invers tunggal $s' \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Lebih lanjut, $s' \neq 1$ dan $s' \neq p-1$, akibatnya $s' \in S$. Diperhatikan bahwa $s' \neq s$ sebab jika $s' = s$, maka $s^2 \equiv 1 \pmod{p}$, sehingga diperoleh $p|s-1$ atau $p|s+1$. Hal ini tidak mungkin sebab $s+1 < p$. Akibatnya diperoleh bahwa anggota-anggota dari S dapat dipartisi menjadi $\frac{p-3}{2}$ pasangan berbeda (s, s') dengan sifat $ss' \equiv 1 \pmod{p}$. Dengan mengalikan $\frac{p-3}{2}$ persamaan kongruensi tersebut diperoleh $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$, sehingga didapat $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. ■

Diperhatikan bahwa konvers dari Teorema Wilson benar, yaitu jika $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ untuk suatu bilangan bulat positif $n \geq 2$, maka n prima, sebab jika $n = n_1 n_2$ untuk suatu bilangan bulat positif $n_1, n_2 \geq 2$, maka $n_1 | 1.2. \ldots . n_1 \ldots (n-1) + 1$, suatu kontradiksi. Hal ini memberikan cara lain mengetahui suatu bilangan merupakan bilangan prima atau tidak. Namun, untuk n yang cukup besar hal ini sulit dilakukan.

Contoh 4.3.8. *Diberikan p bilangan prima dengan $p \equiv 1 \pmod{4}$. Tunjukkan bahwa*

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Penyelesaian. Berdasarkan Teorema Wilson diperoleh

$$-1 \equiv (p-1)! \equiv \prod_{1 \leq i \leq (p-1)/2} i(p-i) \equiv \prod_{1 \leq i \leq (p-1)/2} -i^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \pmod{p}.$$

Karena $p \equiv 1 \pmod{4}$, maka $(-1)^{(p-1)/2} = 1$. Jadi,

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Contoh 4.4.10. *Diberikan bilangan prima $p > 5$. Tunjukkan bahwa $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$.*

Penyelesaian. Diperhatikan bahwa $240 = 2^4.3.5$. Berdasarkan Teorema Kecil Fermat, $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ dan $p^4 \equiv 1 \pmod 5$. Karena $\gcd(p, 2^4) = 1$ dan $\varphi(2^4) = 8$, maka berdasarkan Teorema Euler diperoleh $p^8 \equiv 1 \pmod{16}$. Jadi, $p^8 \equiv 1 \pmod m$ untuk $m = 3, 5$ dan 16. Akibatnya $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$. $\square$

Berdasarkan Teorema Euler diperoleh jika a dan m bilangan bulat positif yang relatif prima, maka terdapat bilangan bulat positif x dengan sifat $a^x \equiv 1 \pmod m$.

Definisi 4.4.11. *Diberikan bilangan bulat positif m. Bilangan bulat positif a dikatakan memiliki* **order** *d modulo m, dinotasikan $\mathrm{ord}_m(a) = d$, jika d adalah bilangan bulat positif terkecil dengan sifat $a^d \equiv 1 \pmod m$.*

Berdasarkan Teorema Euler, $\mathrm{ord}_m(a) = d \leq \varphi(m)$. Jika bilangan bulat positif x memenuhi $a^x \equiv 1 \pmod m$, maka berdasarkan Teorema 4.2.11,

$$a^{\gcd(x,d)} \equiv 1 \pmod m.$$

Karena $\gcd(x, d) \leq d$ dan d bilangan bulat positif terkecil dengan sifat $a^d \equiv 1 \pmod m$, maka diperoleh $\gcd(x, d) = d$. Artinya, d membagi x, sehingga diperoleh Teorema sebagai berikut.

Teorema 4.4.12. *Bilangan bulat positif x memenuhi $a^x \equiv 1 \pmod m$ jika dan hanya jika x kelipatan dari order a modulo m.*

Contoh 4.4.13. *Tentukan order dari 8 modulo 11.*

Penyelesaian. Berdasarkan Teorema Kecil Fermat, diperoleh $8^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Akibatnya, $\mathrm{ord}_{11}(8)|10$. Diperhatikan bahwa $8^2 \equiv -2 \pmod{11}$dan $8^5 \equiv -1 \pmod{11}$. Jadi, $\mathrm{ord}_{11}(8) = 10$. $\square$

Soal Latihan

1. Tunjukkan bahwa $7|2222^{5555} + 5555^{2222}$.

2. Berapakah sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100?

3. Tentukan digit ratusan dari 2013^{2013}.

4. Tentukan semua bilangan bulat $n_1, n_2, \ldots, n_{12}$ yang memenuhi $n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{12}^4 = 2013$.

5. Tentukan sisa pembagian $6^{83} + 8^{83}$ oleh 49.

6. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat positif x dan y dengan sifat $x^3 = 2^y + 15$.

7. Tentukan order dari 5 modulo 12.

8. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku $n^9 \equiv n^3 \pmod{504}$.

9. Diberikan p dan q bilangan prima berbeda. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat a berlaku

$$pq|(a^{pq} - a^p - a^q + a).$$

10. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan genap positif n berlaku $n^2 | 2^{n!} - 1$.

11. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan prima $p > 5$ berlaku $p^4 \equiv 1 \pmod{240}$.

12. (a) Tentukan jumlah semua bilangan bulat positif yang kurang dari 2013 dan relatif prima dengan 2013.

    (b) Tentukan jumlah semua bilangan bulat positif yang kurang dari 4026 dan relatif prima dengan 2013.

13. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif $m < 2013$ dengan sifat

$$\{2013, 4026, 6039, \ldots, 2013m\}$$

merupakan himpunan kelas residu lengkap modulo m.

14. Diberikan p bilangan prima. Tunjukkan bahwa p membagi $ab^p - ba^p$ untuk setiap bilangan bulat positif a dan b.

15. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

16. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan prima ganjil p berlaku

$$1^2.3^2.\dots(p-2)^2 \equiv 2^2.4^2\dots(p-1)^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

BAB VI FUNGSI TANGGA

5.2 Fungsi Tangga

Diperhatikan bahwa untuk setiap bilangan real x terdapat dengan tunggal bilangan bulat n dengan sifat $n \leq x < n+1$.

Definisi 5.2.1. *Diberikan bilangan real x. Bilangan bulat yang lebih besar dari atau sama dengan x disebut* ***floor*** *dari x, ditulis $n = \lfloor x \rfloor$. Selisih $x - \lfloor x \rfloor$ disebut bagian pecahan dari x, dinotasikan dengan $\{x\}$. Bilangan bulat yang lebih besar dari atau sama dengan x disebut* ***ceiling*** *dari x, dinotasikan dengan $n = \lceil x \rceil$.*

Diperhatikan bahwa jika x bilangan bulat, maka $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ dan $\{x\} = 0$, sedangkan jika x bukan bilangan bulat, maka $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Contoh 5.2.2. *Selesaikan sistem persamaan berikut:*

$$\begin{aligned} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} &= 200.0, \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor &= 190.1, \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z &= 178.8. \end{aligned}$$

Penyelesaian. Karena untuk setiap bilangan real x berlaku $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, maka dengan menjumlahkan ketiga persamaan tersebut diperoleh

$$2x + 2y + 2z = 568.9, \quad \textbf{or} \quad x + y + z = 284.45.$$

Dengan mengurangkan masing-masing persamaan yang diberikan dengan persamaan terakhir diperoleh

$$\begin{aligned} \{y\} + \lfloor z \rfloor &= 84.45, \\ \lfloor x \rfloor + \{z\} &= 94.35, \\ \{x\} + \lfloor y \rfloor &= 105.65. \end{aligned}$$

Didapat $\{y\} = 0.45, \lfloor z \rfloor = 84, \lfloor x \rfloor = 94, \{z\} = 0.35, \{x\} = 0.65, \lfloor y \rfloor = 105$. Jadi, $x = 94.65, y = 105.45$ dan $z = 84.35$. $\square$

Contoh 5.2.3. *Diberikan bilangan real positif a dengan $\{a^{-1}\} = \{a^2\}$ dan $2 < a^2 < 3$. Tentukan nilai dari $a^6 - 8a^{-1}$.*

Penyelesaian. Diperhatikan bahwa $a > 1$, maka $a^{-1} < 1$, sehingga diperoleh $\{a^{-1}\} = a^{-1}$. Karena $2 < a^2 < 3$, maka $\{a^2\} = a^2 - 2$. Akibatnya diperoleh $a^{-1} = \{a^{-1}\} = \{a^2\} = a^2 - 2$ atau $a^3 - 2a - 1 = 0$. Diperoleh

$$(a+1)(a^2 - a - 1) = a^3 - 2a - 1 = 0.$$

Nilai a positif yang memenuhi hanya $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Diperhatikan bahwa

$$a^6 = (a^3)^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 4(a+1) + 4a + 1 = 8a + 5.$$

Diperoleh $a^7 = 8a^2 + 5a = 13a + 8$, sehingga berlaku

$$a^6 - 8a^{-1} = \frac{a^7 - 8}{a} = 13.$$

□

Contoh 5.2.4. *Tentukan semua solusi real dari persamaan*

$$4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0.$$

Penyelesaian. Diperhatikan bahwa karena untuk setiap bilangan real x berlaku $\lfloor x \rfloor \leq x$, maka diperoleh

$$(2x-3)(2x-17) = 4x^2 - 40x + 51 \leq 4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0,$$

sehingga didapat $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$. Akibatnya diperoleh $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq 8$. Di lain pihak

$$x = \frac{\sqrt{40\lfloor x \rfloor - 51}}{2},$$

sehingga berlaku

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{40\lfloor x \rfloor - 51}}{2} \right\rfloor.$$

Dengan mensubstitusi $\lfloor x \rfloor \in \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ ke persamaan tesebut, diperoleh bahwa nilai $\lfloor x \rfloor$ yang memenuhi hanya $2, 6, 7$ atau 8. Diperoleh nilai x yang memenuhi adalah $\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}$ dan $\frac{\sqrt{269}}{2}$. □

Contoh 5.2.5. *Tentukan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan* $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^4$.

Penyelesaian. Dengan menggunakan Binomial Newton diperoleh

$$\begin{aligned}(\sqrt{6}+\sqrt{5})^4 &= (\sqrt{6})^4+4(\sqrt{6})^3\sqrt{5}+6(\sqrt{6})^2(\sqrt{5})^2+4\sqrt{6}(\sqrt{5})^3+(\sqrt{5})^4\\ &= 36+24\sqrt{30}+180+20\sqrt{30}+25=241+49\sqrt{30}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(\sqrt{6}-\sqrt{5})^4 &= (\sqrt{6})^4-4(\sqrt{6})^3\sqrt{5}+6(\sqrt{6})^2(\sqrt{5})^2-4\sqrt{6}(\sqrt{5})^3+(\sqrt{5})^4\\ &= 36-24\sqrt{30}+180-20\sqrt{30}+25=241-49\sqrt{30}.\end{aligned}$$

Diperoleh

$$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^4+(\sqrt{6}-\sqrt{5})^4=482.$$

Diperhatikan bahwa $\sqrt{6}-\sqrt{5}<1$, maka $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^4<1$. Akibatnya diperoleh

$$\left\lfloor(\sqrt{6}+\sqrt{5})^4\right\rfloor=481.$$

□

Beberapa karakteristik dari fungsi floor atau fungsi tangga diberikan sebagai berikut.

Teorema 5.2.6. *Diberikan bilangan real* x, y.

a. *Jika* a *dan* b *bilangan bulat dengan* $b>0$ *dan* q, r *berturut-turut hasil bagi dan sisa ketika* a *dibagi oleh* b, *maka* $q=\lfloor\frac{a}{b}\rfloor$ *dan* $r=\{\frac{a}{b}\}.b$.

b. *Untuk setiap bilangan bulat* n *berlaku* $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$ *dan* $\lceil x+n\rceil=\lceil x\rceil+n$.

c. *Jika* x *bilangan bulat, maka* $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=0$; *jika* x *bukan bilangan bulat, maka* $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=1$.

d. *Jika* $x\leq y$, *maka* $\lfloor x\rfloor\leq\lfloor y\rfloor$.

e. $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor\leq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$.

f. *Jika* $x, y \geq 0$, *maka* $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$.

g. *Jika* $x \geq 0$, *maka untuk setiap bilangan bulat positif* n *banyaknya kelipatan positif dari* n *yang kurang dari atau sama dengan* x *adalah* $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$.

h. *Untuk setiap bilangan bulat positif* n *berlaku*

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor .$$

Contoh 5.2.7. *Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real* x *dan* y *berlaku*

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor .$$

Penyelesaian. Diberikan bilangan real x dan y. Karena $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ dan $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, maka diperoleh

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor$$

dan

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor .$$

Akibatnya, cukup dibuktikan

$$\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor .$$

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\{x\} \geq \{y\}$. Diperoleh $2\{x\} \geq \{x\} + \{y\}$, sehingga diperoleh

$$\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq \lfloor 2\{x\} \rfloor \, \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor .$$

Jadi,

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor .$$

$\square$

Contoh 5.2.8. *Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif* n *berlaku*

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor .$$

Penyelesaian. Diambil sebarang bilangan bulat positif n. Diperhatikan bahwa

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n^2+n}$$

dan

$$n < \sqrt{n^2+n} < n+1.$$

Diperoleh

$$\sqrt{4k+1} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+3}.$$

Karena setiap bilangan kuadrat bersisa 0 atau 1 ketika dibagi oleh 4, maka $4n+2$ dan $4n+3$ bukan bilangan kuadrat, sehingga diperoleh

$$\left\lfloor \sqrt{4k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4k+2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4k+3} \right\rfloor.$$

Jadi,

$$\left\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor.$$

□

Contoh 5.2.9. *Diberikan p dan q bilangan bulat yang relatif prima. Tunjukkan bahwa*

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Penyelesaian. Karena $\gcd(p,q)=1$, maka $\frac{ip}{q}$ bukan bilangan bulat untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, q-1$. Diperoleh

$$\left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(q-i)p}{q} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-ip}{q} \right\rfloor = p-1$$

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, q-1$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor &= \sum_{i=1}^{q-1} \left(\left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(q-i)p}{q} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} (p-1) = (p-1)(q-1). \end{aligned}$$

Jadi,

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

$\square$

Selanjutnya, diberikan salah satu sifat terkenal terkait fungsi tangga yaitu Identitas Hermit.

Teorema 5.2.10 (Identitas Hermit). *Untuk setiap bilangan real x dan bilangan bulat positif n berlaku*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

Bukti. Diambil sebarang bilangan real x dan bilangan bulat positif n. Kasus x bilangan bulat cukup jelas. Diasumsikan x tidak bulat, berarti $0 < \{x\} < 1$, sehingga terdapat $1 \leq i \leq n-1$ dengan sifat

$$\{x\} + \frac{i-1}{n} < n \quad \text{dan} \quad \{x\} + \frac{i}{n} \geq 1,$$

ekuivalen dengan

$$\frac{n-i}{n} \leq \{x\} < \frac{n-i+1}{n}.$$

Akibatnya diperoleh

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor = \ldots = \left\lfloor x + \frac{i-1}{n} \right\rfloor$$

dan

$$\left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{i+1}{n} \right\rfloor = \ldots = \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor,$$

sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor &= i \lfloor x \rfloor + (n-i)(\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= n \lfloor x \rfloor + n - i. \end{aligned}$$

Di sisi lain,

$$n \lfloor x \rfloor + n - i \leq n \lfloor x \rfloor + n\{x\} = nx < n \lfloor x \rfloor + n - i + 1,$$

yang berarti $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor + n - i$. Jadi,

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor &= n \lfloor x \rfloor + n - i \\ &= \lfloor nx \rfloor . \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Contoh 5.2.11. *Diberika bilangan real x. Tunjukkan bahwa*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor .$$

Penyelesaian. Dengan mengambil $n = 2$ pada Identitas Hertmit diperoleh

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor ,$$

atau

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor .$$

Akibatnya diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor\right) = \lfloor x \rfloor .$$

□

5.3 Pangkat Tertinggi

Fungsi floor memiliki cukup banyak aplikasi, salah satunya dalam menentukan pangkat tertinggi suatu bilangan pada faktorisasi prima bilangan berbentuk $n!$.

Teorema 5.3.1. *Diberikan bilangan bulat positif n dan p dengan p prima. Bilangan bulat non-negatif k yang memenuhi $p^k \| n!$ adalah*

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots .$$

Bukti. Akan dibuktikan dengan induksi matematika.

Basis Induksi. Untuk $n = 1$ diperoleh $p^0 \| 1!$. Di sisi lain, untuk setiap bilangan bulat positif s berlaku

$$\left\lfloor \frac{1}{p^s} \right\rfloor = 0,$$

sehingga diperoleh

$$0 = \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{p^3} \right\rfloor + \dots .$$

$\square$

Contoh 5.3.3. *Diberikan m dan n bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa $m!(n!)^m$ habis membagi $(mn)!$.*

Penyelesaian. Diambil sebarang bilangan prima p. Misalkan w, x, y, z bilangan bulat non-negatif dengan sifat $p^w \| m!$, $p^x \| n!$, $p^y \| m!(n!)^m$ dan $p^z \| (mn)!$. Cukup ditunjukkan $x \leq y$. Diperhatikan bahwa $y = w + mx$, sehingga cukup ditunjukkan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor + m \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor .$$

Jelas bahwa jika $p > n$, jumlahan kedua pada ruas kanan bernilai 0, sehingga ketaksamaan benar. Diasumsikan $p \leq n$. Misalkan s bilangan bulat positif dengan sifat $p^s \leq n < p^{s+1}$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor &= \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor m\frac{n}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^i}\frac{n}{p^s} \right\rfloor \\
&\geq m \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor \\
&\geq m \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor .
\end{aligned}$$

$\square$

Soal Latihan

1. Diketahui x dan y bilangan real dengan sifat $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 9$ dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 12$. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$.

2. Diketahui n bilangan bulat positif dengan 7 digit terakhir dari $n!$ adalah 8000000. Tentukan nilai n.

3. Diketahui s dan t bilangan bulat positif dengan sifat

$$7^s \| 400! \quad \text{dan} \quad 3^t \| ((3!)!)!.$$

Tentukan nilai $s + t$.

Terbukti untuk kasus $n = 1$.

Langkah Induksi. Diasumsikan pernyataan benar untuk setiap $n < m$. Akan ditunjukkan pernyataan benar untuk $n = m$. Misalkan k memenuhi $p^k \| m!$. Diperhatikan bahwa banyaknya bilangan kelipatan p di antara $1, 2, \ldots, m$ adalah $\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor$. Diperoleh k memenuhi

$$p^k \| p(2p)(3p)\ldots(k_1 p) = p^{k_1}(k_1)!,$$

dengan $k_1 = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor$, sehingga cukup dicari k dengan sifat

$$p^{k-k_1} \| (k_1)!$$

Berdasarkan asumsi induksi diperoleh

$$k - k_1 = \left\lfloor \frac{k_1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1}{p^3} \right\rfloor + \ldots.$$

Karena untuk setiap bilangan bulat positif s berlaku

$$\left\lfloor \frac{k_1}{p^s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor}{p^s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{p^s} \right\rfloor,$$

maka diperoleh

$$k - \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^4} \right\rfloor + \ldots.$$

Jadi,

$$k = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \ldots.$$

Terbukti pernyataan benar untuk kasus $n = m$. ■

Contoh 5.3.2. *Tentukan banyaknya digit nol berurutan yang terletak pada bagian akhir dari representasi desimal* 2013!.

Penyelesaian. Akan dicari m dengan sifat $10^m \| 2013!$. Diperhatikan bahwa $10 = 2.5$ dan $2 < 5$. Diperoleh bilangan p, q dengan $2^p \| 2013!$ dan $5^q \| 2013!$ memenuhi $q < p$, sehingga didapat $m = q$. Akibatnya

$$m = q = \left\lfloor \frac{2013}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{625} \right\rfloor = 402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

4. Tentukan bilangan bulat positif terkecil n dengan sifat $10^{290}|n!$.

5. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi

$$\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5.$$

6. Tentukan sisa pembagian $\left\lfloor \dfrac{10^{66}}{10^{33}+3} \right\rfloor$ oleh 1000.

7. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+2} \right\rfloor.$$

8. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

9. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m dan n berlaku

   (a) $m!n!(m+n)!$ membagi $(2m)!(2n)!$.

   (b) $(k!)^{k^n+k^{n-1}+\ldots+k+1}|(k^{n+1})!$.

10. Diberikan bilangan real r dengan sifat

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor r + \frac{91}{100} \right\rfloor = 546.$$

Tentukan $\lfloor 100r \rfloor$.

11. Tentukan banyaknya bilangan bulat berbeda pada barisan

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2005} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2005} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2005^2}{2005} \right\rfloor.$$

12. Diberikan $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ dan n bilangan bulat positif. Tentukan nilai dari $\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$.

13. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n,

$$\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$$

merupakan bilangan ganjil.

14. Diberikan p dan q bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor = \frac{(q-1)(p-1)}{2} + \frac{\gcd(p,q)-1}{2}.$$

15. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan prima $p > 2$ berlaku

$$\left\lfloor (2+\sqrt{5})^p \right\rfloor - 2^{p+1}$$

habis dibagi oleh p.

Soal-Soal Tambahan

1. (a) Diberikan n bilangan bulat lebih dari 2. Tunjukkan bahwa diantara bilangan-bilangan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n},$$

ada sebanyak genap bilangan yang tidak dapat disederhanakan.

   (b) Tunjukkan bahwa

$$\frac{12n+1}{30n+2}$$

tidak dapat disederhanakan untuk setiap bilangan bulat positif n.

2. Diberikan k bilangan bulat positif lebih dari 1. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan prima p dan barisan bilangan bulat positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dengan $a_i < a_j$ untuk setiap $i < j$ dan setiap suku pada barisan

$$p + ka_1, p + ka_2, p + ka_3 \ldots$$

merupakan bilangan prima.

3. Diberikan bilangan bulat positif m dan n dengan sifat

$$\operatorname{lcm}(m,n) + \gcd(m,n) = m + n.$$

Tunjukkan bahwa salah satu diantara dua bilangan tersebut habis dibagi oleh bilangan yang lain.

4. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif a dan b berlaku

$$(36a + b)(a + 36b) \neq 2^k$$

untuk setiap bilangan bulat positif k.

5. Tentukan jumlah semua bilangan berbentuk a/b dengan a dan b merupakan faktor positif dari 27000 yang relatif prima.

6. Diberikan x, y, z bilangan bulat positif dengan sifat
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$
Misalkan $h = \gcd(x, y, z)$. Tunjukkan bahwa $hxyz$ dan $h(y-z)$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.

7. Diberikan p bilangan prima dengan $p \equiv 2 \pmod 3$ dan $p | a^2 + ab + b^2$ untuk suatu bilangan bulat a dan b. Tunjukkan bahwa a dan b habis dibagi oleh p.

8. Tentukan semua bilangan bulat positif n dengan sifat $\sqrt[3]{n! + 5}$ bilangan bulat.

9. Tentukan semua bilangan prima p dengan sifat $\tau(p^2 + 11) = 6$.

10. Diberikan bilangan bulat positif n. Jika $a \equiv b \pmod n$, tunjukkan bahwa $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$. Apakah sebaliknya tetap berlaku?

11. Diberikan p bilangan prima dan k bilangan bulat dengan $1 \leq k \leq p - 1$. Tunjukkan bahwa
$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p.$$

12. Diberikan bilangan prima p. Tunjukkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya bilangan bulat positif n dengan sifat $p | 2^n - n$.

13. Diberikan k bilangan ganjil positif. Tunjukkan bahwa
$$1 + 2 + \ldots + n | (1^k + 2^k + \ldots + n^k)$$
untuk setiap bilangan bulat positif n.

14. Diberikan p bilangan prima lebih dari 5. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat x dengan sifat $x^4 = p - 4$.

15. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku
$$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) \leq n^2.$$

16. Tentuka semua himpunan berhingga atas bilangan bulat positif yang memenuhi

$$\frac{i+j}{\gcd(i+j)}$$

merupakan anggota S untuk setiap $i, j \in S$.

17. Diketahui bahwa 2^{29} merupakan bilangan sembilan digit dengan setiap digitnya berbeda. Tentukan digit diantara 0,1,2,...,9 yang bukan merupakan digit dari 2^{29}.

18. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat lebih dari 1, bilangan $n^5 + n^4 + 1$ merupakan bilangan komposit.

19. Bilangan 10 digit dikatakan "menarik" jika setiap digitnya berbeda dan merupakan kelipatan dari 11111. Tentukan banyaknya bilangan menarik.

20. Tentukan semua bilangan prima p dan q dengan sifat $pq|(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

21. Tunjukkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya bilangan yang tidak memuat digit 0 dan habis dibagi oleh jumlah dari digit-digitnya.

22. Diberikan a dan b bilangan bulat positif yang relatif prima dan dibentuk deret artimatik berikut: $a, a+b, a+2b, \ldots$.

    (a) Tunjukkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya suku dari barisan aritmatik tersebut yang memiliki faktor prima sama.

    (b) Tunjukkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya pasangan suku dari barisan aritmatik tersebut yang relatif prima.

23. Diberikan n bilangan bulat positif.

    (a) Tentukan $\gcd(n! + 1, (n+1)! + 1)$.

    (b) Diberikan a dan b bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa

    $$\gcd(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\gcd(a,b)} - 1.$$

    (c) Diberikan a dan b bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa $\gcd(n^a + 1, n^b + 1)$ habis membagi $n^{\gcd(a,b)} + 1$.

31. Diberikan a dan b bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa banyaknya solusi bulat non-negatif (x, y, z) dari persamaan $ax + by + z = ab$ adalah

$$\frac{1}{2}[(a+1)(b+1) + \gcd(a,b) + 1].$$

32. Diberikan p, q dan r bilangan prima lebih dari 2 dengan sifat $q^r + 1$. Tunjukkan bahwa $2r|p-1$ atau $p|q^2-1$.

33. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor.$$

34. Tentukan semua bilangan bulat positif n sehingga n memiliki kelipatan dengan digit-digitnya tidak sama dengan 0.

35. Tentukan bilangan bulat terbesar n dengan sifat n habis dibagi oleh setiap bilangan bulat positif yang kurang dari $\sqrt[3]{n}$.

36. Tentukan semua bilangan real x dengan sifat $x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 88$.

37. Tentukan bilangan bulat a, b, c yang sepasang-sepasang relatif prima dengan $a, b, c > 1$ dan

$$b|2^a+1, \quad c|2^b+1, \quad a|2^c+1.$$

38. Diberikan n bilangan bulat positif dan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bilanga prima berbeda yang lebih dari 3. Tunjukkan bahwa $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ memiliki setidaknya 4^n faktor positif.

39. Untuk setiap bilangan bulat positif k, didefinisikan $p(k)$ sebagai faktor ganjil terbesar dari k. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$\frac{2n}{3} < \frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \ldots + \frac{p(n)}{n} < \frac{2(n+1)}{3}.$$

40. Tentukan semua bilangan bulat positif k dengan sifat

$$\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = k$$

untuk suatu bilangan bulat positif n.

(d) Diberikan m bilangan bulat positif dengan $\gcd(m, n) = 1$. Tentukan

$$\gcd(5^m + 7^m, 5^n + 7^n).$$

24. Diberikan a bilangan bulat dengan sifat

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{23} = \frac{a}{23!}.$$

Tentukan sisa pembagian a oleh 13.

25. (a) Diberikan $p > 3$ bilangan prima dan m, n bilangan bulat yang relatif prima dengan sifat

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Tunjukkan bahwa $p|m$.

(b) Diberikan $p > 3$ bilangan prima. Tunjukkan bahwa

$$p^2|(p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right).$$

26. Tentukan semua pasangan bilangan bulat non-negatif (x, y) dengan sifat $x^2 + 3y$ dan $y^2 + 3x$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.

27. Tentukan tiga digit terakhir dari $2003^{2002^{2001}}$.

28. Diberikan $p \geq 3$ bilangan prima dan

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\} \quad \text{dan} \quad \{b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}\}$$

dua himpunan kelas residu lengkap modulo p. Tunjukkan bahwa

$$\{a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{p-1}b_{p-1}\}$$

bukan himpunan kelas residu lengkap modulo p.

29. Tunjukkan bahwa setiap bilanga bulat positif kurang dari $n!$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan tidak lebih dari n bilangan positif yang merupakan faktor dari $n!$.

30. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan ganjil $n > 1$ berlaku $n \nmid 2^n + 1$.